

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

С.Т.Дүзелбаев

ТЕХНИКАЛЫҚ МЕХАНИКА

Теориялық механика. Материалдар кедергісі

оқулық

Техникалық (құрылыстан басқа) колледж студенттеріне арналған

Алматы, 2016

ӘОЖ 620.1(075.32)

КБЖ 30.12я722

Д 37

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі техникалық және кәсіптік білім беру ұйымдарының «Көлік, көлікті пайдалану» профилі бойынша оқу-әдістемелік бірлестігі оқулық ретінде ұсынған

Пікір жазғандар:

Ж.Б.Бакиров – т.ғ.д., Қарағанды техникалық университетінің профессоры;

А.Ғ.Ибраев – т.ғ.д., Л.Н.Гумилев атындағы Еуразиялық Ұлттық университетінің профессоры;

Б.С.Сәуірбаев – т.ғ.д., Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің профессоры

Дүзелбаев С.Т.

Д 37 Техникалық механика. Теориялық механика. Материалдар кедергісі. Техникалық (құрылыстан басқа) колледж студенттеріне арналған оқулық / С.Т.Дүзелбаев – Алматы: «Бастау», 2016. – 456 б.

ISBN 978-601-281-175-9

Техникалық механика курсы, типтік бағдарлама бойынша, теориялық механика, материалдар кедергісі және машиналар тетіктері бөлімдерінен тұрады. Оқулық теориялық механика, материалдар кедергісі атты екі бөлімнен құралған. Әрбір тақырыпта теориялық материалдар мысалдармен пысықталған және әрбір тараудың соңында жаттығу есептері мен қайталау сұрақтары жинақталған.

Оқулық Техникалық механика курсының оқу жоспары мен типтік бағдарламасына сәйкес және техникалық (құрылыстан басқа) колледж студенттеріне арналып дайындалған.

Сонымен қатар оқулықты жоғары техникалық оқу орындарының технолог, электрик, экономист т.с.с. механикалық емес мамандықтарды дайындайтын оқу орындарының оқу үдерісіне қолдануға болады.

ӘОЖ 620.1(075.32)

КБЖ 30.12я722

ISBN 978-601-281-175-9

© Дүзелбаев С.Т., 2016

© Бастау, 2016

АЛҒЫ СӨЗ

Механика – материалдық денелердің механикалық қозғалысы және өзара әсерлері туралы ілім.

Техникалық механика Механиканың, дене қозғалысы заңын және осы қозғалыстардың жалпы сипаттамаларын зерттейтін, бір бөлімі болып табылады.

Осы заңдылықтардың негізінде, имараттар, механизмдер мен машиналарды құрастыруға жағдай жасайтын техникалық механиканың әдістері мен тәсілдері жасалды, сонымен қатар әртүрлі техникалық және құрылыстық конструкцияларды беріктікке, орнықтылыққа, қатандыққа, яғни берілген жүктеме деңгейінде жұмыс істеу қабілетіне іс жүзінде есептеулер жүргізуге мүмкіндік береді.

Техникалық механиканың негізінде классикалық механиканың негізгі заңдары жатады. Техникалық механика – «Теориялық механика» және «Материалдар кедергісі» пәндерінен тұрады. Колледждер үшін техникалық механиканың әрбір келесі бөлімін оқу студенттердің алдыңғы бөлімдерді білетіндігіне, ал сонымен қатар жалпы білім беретін – математика, геометрия, физика пәндерінен базалық білімдер игергендіктеріне негізделген.

«Теориялық механика» бөлімі *статика*, *кинематика* және *динамика* болып бөлінеді.

«*Статика*» – Теориялық механиканың дене тепе-теңдікте болуын немесе бірқалыпты түзу сызықты қозғалуы шарттарын зерттейтін бөлімі.

Статика мәселелерін шешуге қолданылатын әдістер мен тәсілдер дененің тепе-теңдік күйін қамтамасыз ететін сыртқы күш факторларын анықтауға, яғни денеге түсірілген сыртқы күштер мен моменттердің белгілі мәндері бойынша, осы денеге әсер етуші белгісіз күш әсерлеріне (күштерді, моменттерді) есептеу жүргізуге мүмкіндік береді.

Мұндай есептеулер жүргізу «Материалдар кедергісі» ілімінде қолданылатын әдістер мен тәсілдерді пайдаланып, әртүрлі имараттар мен механизмдердің жұмыс жасау қабілеттіктерін бағалау үшін қажет.

«*Кинематика*» – Теориялық механиканың материалдық денелердің қозғалысын оларға әсер ететін күштерге тәуелсіз зерттейтін бөлімі.

Кинематика есебі белгілі уақыт мерзімінде немесе уақыт аралығынан кейін дененің кеңістіктегі қандай да бір санақ жүйесіне қатысты орнын анықтауға келтіріледі.

Статика есептерін шешуде қолданылатын әдістер мен тәсілдер жұмыс жасағанда жекеленген тетіктері мен түйіндері салыстырмалы орын ауыстыратын күрделі машиналардың механизмдеріне, кинематикалық есептеулер жүргізуге мүмкіндік береді.

«Динамика» – Теориялық механиканың денеге түсірілген күштер мен олардың әсерінен болатын қозғалыс арасындағы тәуелділікті зерттейтін бөлімі.

Динамикада қолданылатын әдістер мен тәсілдер түсірілген жүктемелерден және реакциялардан туындайтын машина механизмдерінің, тетіктері мен түйіндерінің қозғалысын және орын ауыстыруын есептеуге мүмкіндік береді.

«Материалдар кедергісі» – құрылыс және техникалық құрылымдардың элементтерінің және материалдарының деформацияланатыны және беріктігі жөніндегі ілім. Материалдар кедергісінде қолданылатын әдістер мен тәсілдер берілген жұмыс режиміндегі техникалық және құрылыс конструкцияларына беріктік, қатаңдық және орнықтылық есептеулерін жүргізуге пайдаланылады.

Техникалық механиканың бұл бөлімін Теориялық механика курсының «Статика» бөлімі негіздерін білмей игеру мүмкін емес.

Оқулықтың әрбір тақырыбының теориялық материалдары мысалдармен бекітілген және әр бөлімнің соңында жаттығу есептері, қайталау сұрақтары, оқушылардың өздері өз білімін тексеруге арналған тест тапсырмалары топтастырылған.

Бұл жайт оқулықтың заманның талабына сай әзірленгенін көрсетеді. Оқулық машина жасау колледжі оқушыларына арналып дайындалған.

Оқулық бойынша аңғартпаларыңызды мына мекенжайға бағыттаңыздар: 010008, Астана қаласы, Қажымұқан көшесі 5, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, «Механика» кафедрасы.

Дүзелбаев Сайлаубек Тілеубайұлы

Шартты белгілеулер

Теориялық механика бөлімі бойынша

\bar{F}	– күш векторы
F	– күш модулі
F_x, F_y, F_z	– күштің тиісінше $x - x$, $y - y$ және $z - z$ өстеріне проекциялары
$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$	– күштер жүйесі
$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$	– күштер жүйесінің тең әсерлі күші
$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}$	– күштер жүйесінің тиісінше $x - x$, $y - y$ және $z - z$ өстеріне проекциялары
$\sum \bar{F}_i = 0$	– жинақталатын күштер жүйесінің геометриялық тепе-теңдік шарты
$\sum \bar{M}_i = 0$	– қос күш жүйесінің тепе-теңдік шарты
$M_0(\bar{F})$	– күштің нүктеге қатысты моменті
M	– күш моментінің модулі
$M_{Ox}(\bar{F}) = yF_z - zF_y;$ $M_{Oy}(\bar{F}) = zF_x - xF_z;$ $M_{Oz}(\bar{F}) = xF_y - yF_x$	– күш моментінің координат өстеріне проекциялары
M_x, M_y, M_z	– тиісінше $x - x$, $y - y$ және $z - z$ өстеріне қатысты моменттер модулі
$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0;$ $\sum M_O(\bar{F}_k) = 0$	– жазық еркін күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары
$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum M_B(\bar{F}_k) = 0;$ $\sum \bar{F}_{kx} = 0$	– жазық еркін күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары
$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum M_B(\bar{F}_k) = 0;$ $\sum M_C(\bar{F}_k) = 0$	– жазық еркін күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары
$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum M_x(\bar{F}_k) = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; \quad \sum M_y(\bar{F}_k) = 0;$ $\sum F_{kz} = 0; \quad \sum M_z(\bar{F}_k) = 0$	– кеңістіктегі еркін күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары

$\vec{R}_O = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$	– күштер жүйесінің бас векторы
$\vec{M}_O = M_{Ox} \vec{i} + M_{Oy} \vec{j} + M_{Oz} \vec{k}$	– күштер жүйесінің бас моменті
$\vec{r} = \vec{r}(t)$	– қозғалыстың векторлық тәсілмен берілуі
$\vec{r}(t) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$	– радиус вектор
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	– радиус векторының модулі
$\cos\left(\hat{x}, \vec{r}\right) = \frac{x}{r}, \cos\left(\hat{y}, \vec{r}\right) = \frac{y}{r},$ $\cos\left(\hat{z}, \vec{r}\right) = \frac{z}{r}$	– бағыттаушы косинустар
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$	– жылдамдық векторы, нүктенің жылдамдығы
$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$	– үдеу векторы, нүктенің үдеуі
$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$	– қозғалыстың координаттық тәсілмен берілуі
$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},$ $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$	– жылдамдық векторының координат өстеріндегі проекциялары
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$	– жылдамдық модулі
$\cos\left(\hat{x}, \vec{v}\right) = \frac{v_x}{v}, \cos\left(\hat{y}, \vec{v}\right) = \frac{v_y}{v},$ $\cos\left(\hat{z}, \vec{v}\right) = \frac{v_z}{v}$	– жылдамдық бағыттаушы косинустары
$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$	– үдеу векторы, нүктенің үдеуі
$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y},$ $w_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$	– үдеу векторының координат өстеріндегі проекциялары
$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$	– үдеу модулі
$s = s(t)$	– қозғалыстың табиғи тәсілмен берілуі

$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \bar{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \bar{\tau}$	– табиғи тәсілмен берілген нүктенің жылдамдық векторы
$\bar{\tau}$	– жанама өстің орны
$v_{\tau} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$	– жылдамдықтың траектория жанамаcына проекциясы
$\bar{\omega} = \bar{\omega}_{\tau} + \bar{\omega}_n$	– табиғи тәсілмен берілген нүктенің үдеу векторы
$\bar{\omega}_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \bar{\tau} = \dot{v}_{\tau} \bar{\tau}$	– векторы траекторияның жанамаcымен бағытталған нүктенің жанама үдеуі
$\bar{\omega}_n = \frac{v^2}{\rho} \bar{n}$	– векторы траекторияның нормалімен бағытталған нүктенің нормаль үдеуі
ω_b	– векторы траекторияның бинормалімен бағытталған нүктенің бинормаль үдеуі
$\omega_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}, \omega_n = \frac{v^2}{\rho},$ $\omega_b = 0$	– үдеу векторының табиғи өстердегі проекциялары
$\omega = \sqrt{\omega_{\tau}^2 + \omega_n^2}$	– толық үдеудің модулі
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_{\tau}}{\omega_n}$	– толық үдеудің бағыты
$\varphi = \varphi(t)$	– қатты дененің айналу заңы немесе айналу теңдеуі
$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \omega = \frac{\pi n}{30}$	– бұрыштық жылдамдық
$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$	– бұрыштық үдеу
ω	– бұрыштық жылдамдық модулі
$\bar{v} = v \bar{\tau} = h \omega \bar{\tau}$	– қозғалмайтын өсті айнала қозғалған дене нүктесінің жылдамдық векторы
$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = h \frac{d\varphi}{dt} = h \omega$	– нүкте жылдамдығының модулі
$\omega_{\tau} = h \cdot \varepsilon,$	– қозғалмайтын өсті айнала қозғалған дене нүктесінің жанама үдеуінің модулі

$\overline{\omega}_\tau = \omega_\tau \bar{\tau}$	– нүктенің жанама үдеу векторы
$\overline{\omega}_n = \omega^2 h$	– нүктенің нормаль үдеуі
$\overline{\omega}_n = \omega_n \bar{n}$	– нормаль үдеу векторы
$\overline{\omega} = \sqrt{\overline{\omega}_\tau^2 + \overline{\omega}_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$	– қозғалмайтын өсті айнала қозғалған дене нүктесінің толық үдеуінің модулі
$\operatorname{tg} \delta = \frac{ \overline{\omega}_\tau }{\overline{\omega}_n} = \frac{ \varepsilon }{\omega^2}$	– нүктенің толық векторының бағыты
$m \overline{\omega} = \overline{F}$	– динамиканың негізгі заңы, материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуі
m	– материялық нүктенің массасы
\overline{F}	– нүктеге әсер етуші күш
$m \overline{\omega} = \overline{F}^{(a)} + \overline{N}$	– еркін емес нүктенің қозғалыс заңы
$\overline{F}^{(a)}$	– нүктеге әсер ететін берілген күштердің тең әсерлі күші
\overline{N}	– байланыс реакцияларының тең әсерлі күші
$m \overline{\omega}_x = F_x, m \overline{\omega}_y = F_y, m \overline{\omega}_z = F_z$	– материялық нүкте қозғалысының декарттық координат өстеріне қатысты алынған дифференциалдық теңдеулері
$m \overline{\omega}_\tau = F_\tau, m \overline{\omega}_n = F_n, m \overline{\omega}_b = F_b$	– материялық нүкте қозғалысының табиғи координаттар жүйесіне қатысты алынған дифференциалдық теңдеулері
$m \ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), m \ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), m \ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t).$	– материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулері
$\overline{Q} = m \overline{v}$	– қозғалыс мөлшері
$\overline{S} = \int_0^t \overline{F} dt$	– күш импульсі
$\frac{d(m \overline{v})}{dt} = \overline{F}. m \overline{v}_1 - m \overline{v}_0 = \int_0^t \overline{F} dt$	– қозғалыс мөлшерінің берілген уақыт аралығындағы өзгерісі

$\bar{K}_O = \bar{r} \times m\bar{v}$	– қозғалыс мөлшерінің моменті немесе кинетикалық момент
$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F},$ $\frac{d}{dt}(m_O(m\bar{v})) = m_O(\bar{F})$	– материялық нүктенің қозғалыс мөлшері моментінің өзгеруі
$dA = F_\tau ds,$	– күштің элементарлық жұмысы
$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau ds,$ $A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} (F_x x + F_y y + F_z z) ds$	– кез келген шекті M_0M_1 орын ауыстырудағы күштің жұмысы
$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau v =$ $= Fv \cos \alpha = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$	– күш қуаты
$T = \frac{mv^2}{2}$	– материялық нүктенің кинетикалық энергиясы
$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA, \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = N$	– материялық нүктенің кинетикалық энергиясы өзгеруінің дифференциалдық түрі
$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{(M_0M_1)}, T_1 - T_0 = A$	– материялық нүктенің кинетикалық энергиясы өзгеруінің интегралдық түрі
$T = \frac{Mv^2}{2}$	– ілгерілемелі қозғалыстағы абсолют қатты дененің кинетикалық энергиясы (M – дененің массасы)
$T = \frac{I_z \omega^2}{2}$	– айналмалы қозғалыстағы дененің кинетикалық энергиясы (I_z – дененің айналу өсіне қатысты екіпін моменті)
$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{I_{cz} \omega^2}{2}$	– жазық-параллель қозғалыстағы дененің кинетикалық энергиясы

Материалдар кедергісі бойынша

F	– күш
M	– июші момент
M_z, M_y	– тиісінше $z - z$ және $y - y$ өстеріне қатысты моменттер
T	– бұраушы момент
N	– бойлық күш
Q	– көлденең күш, кесу күші
R_p	– бұрандаманың жаншылуға есептемелік қарсыласуы
R_s	– бұрандаманың ығысуға есептемелік қарсыласуы
R_u	– бұрандаманың созылуға, сығылуға, иілуге уақытша қарсыласу бойынша есептемелік қарсыласуы
R_{un}	– бұрандаманың МемСТ және техникалық шарт бойынша σ_u беріктік шегіне тең етіп алынатын, үзілуге уақытша қарсыласу
R_y	– аққыштық шек бойынша бұрандаманың созылуға, сығылуға және иілуге есептемелік қарсыласуы
R_{yn}	– бұрандаманың МемСТ және техникалық шарт бойынша шамасы σ_y аққыштық шегіне тең етіп алынатын аққыштық шек
R_t	– шойынның созылуға есептемелік қарсыласуы
R_c	– шойынның сығылуға есептемелік қарсыласуы
E	– серпімділік модулі
G	– ығысу модулі
ν	– көлденең деформация коэффициенті (Пассон коэффициенті)
$[\sigma]$	– мүмкіндік тік кернеу
$[\sigma_t], [\sigma_c]$	– тиісінше созылу мен сығылу мүмкіндік кернеуі
$[\tau]$	– мүмкіндік жанама кернеу
$[\tau_s]$	– кесілу мүмкіндік кернеуі
$[\sigma_p]$	– жаншылу мүмкіндік кернеуі
τ_{adm}^w	– пісірілген жіктің кесілу мүмкіндік кернеуі
$[\sigma_{cr}]$	– орнықтылықтың мүмкіндік кернеуі
σ_z, σ_y	– нормалі тиісінше $z - z$ және $y - y$ өстеріне параллель жазықтықтардағы тік кернеулер
$\tau, \tau_\alpha, \tau_{zy}$	– жанама кернеулер

σ_{pr}	– пропорционалдық шек
σ_y	– аққыштық шек
$\sigma_{0,2}$	– шартты аққыштық шек
σ_u^t	– созудың беріктік шегі
σ_u^c	– сығылудың беріктік шегі
σ_{cr}	– қауіпті кернеу немесе дағдарыс кернеу
A	– қиманың ауданы
A_{bn}	– бұрандама қимасының ауданы
A_f	– арқалық сөресінің қима ауданы
A_w	– арқалық қабырғасының қима ауданы
A_{wf}	– бұрыштық жік металының қима ауданы
I_z, I_y	– қима ауданының тиісінше $z - z$ және $y - y$ өстеріне қатысты екпін моменттері (өстік екпін моменттер)
I_ρ	– қима ауданының полюске қатысты екпін моменті (полярлық екпін момент)
S	– қима ауданының ығысатын бөлігінің бейтарап өске қатысты статикалық моменті
S_z, S_y	– қима ауданының ығысатын бөлігінің тиісінше $z - z$ және $y - y$ өстеріне қатысты статикалық моменттері (өстік статикалық моменттері)
W_z, W_y	– қима ауданының тиісінше $z - z$ және $y - y$ өстеріне қатысты кедергі моменттері (өстік кедергі моменттері)
W_ρ	– қима ауданының полюске қатысты кедергі моменті (полярлық кедергі моменті)
b	– ені
b_{ef}	– қабырғаның есептемелік ені
h	– биіктік
h_{ef}	– қабырғаның есептемелік биіктігі
e	– күштің эксцентритеті
i	– екпін радиусы
i_z, i_y	– қиманың тиісінше $z - z$ және $y - y$ өстеріне қатысты екпін радиустары
i_{min}	– қиманың ең кіші екпін радиусы
k_f	– бұрыштық жіктің катеті
l	– ұзындық, аралық
l_{ef}	– шартты есептемелік ұзындық

l_w	– дәнекерленген жіктің ұзындығы
r	– радиус
t	– қалыңдық
t_f	– арқалық сөресінің қалыңдығы
t_w	– арқалық қабырғасының қалыңдығы
λ	– иілгіштік
ε	– бойлық салыстырмалы деформация
ε_t	– ендік салыстырмалы деформация
ε_{el}	– серпімді салыстырмалы деформация
θ	– салыстырмалы бұралу бұрышы
γ_b	– қосылыстың жұмыстық жағдайының сенімділік коэффициенті
γ_c	– жұмыстық жағдайдың сенімділік коэффициенті
γ_n	– тағайындау бойынша сенімділік коэффициенті
γ_m	– материал бойынша сенімділік коэффициенті
γ_u	– уақытша қарсыласу бойынша есептеудің сенімділік коэффициенті
η	– қима пішінінің әсер коэффициенті
φ	– бойлық иілу коэффициенті

Кіріспе

Негізгі ұғымдар. Механикалық қозғалыс. Теориялық механиканың даму тарихына шолу, мазмұны және негізгі бөліктері

Негізгі ұғымдар. *Механика* – материялық денелердің механикалық қозғалыстары және әсерлері жөніндегі ғылым. **Теориялық механика** – денелердің қозғалу заңдылықтарын және осы қозғалыстардың жалпы сипаттамаларын зерттейтін механиканың бөлімі.

Механикалық қозғалыс деп уақыт өте денелердің кеңістіктегі өзара орын ауыстыруын немесе берілген дене бөліктерінің өзара орналасуының өзгеруін айтамыз.

Механикалық қозғалыс, яғни кеңістіктегі материялық дененің орын ауыстыруы қандай да бір денеге қатысты анықталады. Бұл дене **санақ дене** деп аталады. Санақ денемен координаттар жүйесін байланыстырып, оған қатысты материялық дененің немесе нүктенің уақыт өтуімен қозғалысын қарастырады. Уақыттың санақ басы ерікті таңдалады. Денемен байланыстырып таңдап алынған координаттық санақ жүйесі ондағы қабылданған уақыт санағымен бірге **санақ жүйесін** құрайды.

Механикадағы **кеңістік** – үш өлшемді Евклид кеңістігі. Кеңістіктегі өлшеулер Евклид геометриясындағы әдістерді қолдану арқылы жүргізіледі. Қашықтықты өлшеуге метр алынады. Механикада **уақыт әмбебап шама** деп есептеледі, яғни барлық санақ жүйелерінде бірдей өтеді. Уақытты секундпен өлшейді. Уақыт – ылғи өзгеріп отыратын скалярлық шама.

Дененің тыныштық күйін қозғалыстың дербес жағдайы деп қарастыруға болады. Тыныштық – әрқашан салыстырмалы сипаттама, өйткені тыныштықтағы дене одан басқа денеге қарағанда тыныштықта, ал ол, өз кезегінде, кеңістікте қозғалыста болуы мүмкін. Табиғатта абсолют қозғалмайтын дене жоқ және болуы мүмкін емес.

Мысалы, бірқалыпты және түзусызықты қозғалыстығы пойыз вагонында отырған адам өзін вагонға қатысты тыныштықта отырмын деп сезінуі мүмкін, ал Жерге қатысты ол қозғалысты болады.

Тек механиканың заңдылықтарымен түсіндіруге болмайтын, механикалық қозғалысты қамтитын заттардың басқа да қозғалыс түрлері өзге ілімдердің зерттеу объектісіне жатады, мысалы, химияның, биологияның және т.б.

Механика ең ерте ілімдердің біріне жатады. Ертедегі атақты философ Аристотель (б.ғ. дейінгі 384-322) «механика» терминін енгізген. Механиканың алғашқы ғылыми негізін салушы Архимед (б.ғ. дейінгі 287-212) иіңтірекке түсірілген күштердің тепе-теңдігі туралы және дененің ауырлық центрін анықтау есептерінің тура шешімдерін анықтады.

Қайта өрлеу заманында (XIV-XVI ғ.) Италияның атақты суретшісі, ғалым және инженер Леонардо да Винчи (1452-1519 жж.) механиканың дамуына үлкен үлес қосты. Ол сырғанау үйкелісін, құлаған дененің қозғалысын зерттеді, алғаш күш моменті ұғымын енгізді.

Н.Коперниктің (1473-1543) атақты жаңалықтарының арқасында жаратылыстану ғылымында төңкеріс болды: Птолемей енгізген геоцентрлік жүйе орнына дүниенің гелиоцентрлік жүйесі келді. Коперник ілімінің негізінде И.Кеплер (1571-1630) планеталар қозғалының үш заңын тұжырымдады, кейіннен Ньютонның бүкіләлемдік тартылыс заңын ашуға алып келді. Италияндық Галилео Галилей (1564-1642) және ағылшын Исаак Ньютон (1643-1727) динамика ғылымының негізін салушылар болып саналады. Теориялық механиканың үш аксиомасы Ньютонның заңдары деген атпен белгілі. И. Ньютон тұжырымдаған бүкіләлемдік тартылыс заңы Нептун, Плутон планеталарын ашуға әкелгені белгілі. Оның математика ғылымына қосқан үлесі де орасан зор.

Одан соңғы уақыт аралығында механика мен математика ғылымдарының біте қайнасуы нәтижесінде аналитикалық механиканың негізі жасалып, көптеген күрделі мәселелер шешілген. Бұларға қатысты Л.Эйлер (1707-1783), Ж.Даламбер (1717-1783), Ж.Л.Лагранж (1736-1813), М.В.Остроградский (1801-1873), П.Л.Чебышев (1821-1894), С.В.Ковалевская (1850-1891), А.М.Ляпунов (1857-1918), Н.Е.Жуковский (1847-1921), И.В.Мещерский (1859-1935) сияқты ғалымдарды атауға болады.

Механик-ғалымдардың құрметіне келесі мәселелерді шешулері жатады: алғашқы жасанды Жер серігін ұшыру, Айдың арғы бетінің фотосуретін түсіру, ғарыш кеңестігіне адамның алғашқы ұшуы және

адамдардың Ай бетіне түсуі. Бұл жерде орыстың ғажайып ғалымы және өнертапқышы К.Э.Циолковскийдің (1857-1935) реактивті қозғалыс және ғарыштық ұшу теориясының негізін салғанын атап өткен жөн. Көрнекті ғалым, академик С.П.Королев (1906-1966) – ғарыштық «Восток» және «Восход» кемелерінің бас конструкторының арқасында адамдардың ғарышты игеру армандары ақиқат болды. 1961 ж. 12 сәуірде ғарышқа ұшқан, алғашқы адам – Ю.А.Гагарин (1964-1968).

Механика теориясына Қазақстан ғалымдарының қосқан үлестері туралы пайдаланылған әдебиеттерде біршама орын алған.

Механик-ғалым академик А.Ю.Ишлинскийдің сөзі бойынша: механика табиғаттың барлық құбылыстарына және техниканы жасап шығаруға, барлық жаратылыстану ғылыми пәндерге қатысы бар. Іс жүзінде, табиғаттың қандай да бір құбылыстарын оның механикалық жағын анықтамай, жеткілікті деңгейде түсіну мүмкін емес, және қандай да бір техниканы механикалық заңдылықтардың қайсыбірін есепке алмай жасап шығару мүмкін емес. Мұнда таңғаларлық еш нәрсе жоқ, өйткені бізді қоршаған макроәлемдегі құбылыстардың барлығы қозғалысқа байланысты, сондықтан механикаға қандай да бір қатыссыз болуы мүмкін емес.

Өмірде кездесетін нақты денелер көптеген қасиеттерімен, сонымен қатар пішінімен, өлшемімен, заттарымен (материалымен) және массасымен ерекшеленеді. Механикада табиғатта кездесетін нақты денелер емес, олардың идеал қасиеттерімен бөлінген абстракт түрлері (модельдері) – материялық нүкте, материялық нүктелердің механикалық жүйесі, абсолют қатты дене қарастырылады. Дененің күйін зерттейтін бұл әдісті *абстракция әдісі* деп атайды.

Оқулықтың бірінші бөлімінде теориялық механиканың негіздері мазмұндалған.

Теориялық механика үш бөлімнен тұрады: статика, кинематика, динамика.

БІРІНШІ БӨЛІМ. СТАТИКА

1-тарау. СТАТИКАНЫҢ НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАРЫ МЕН АКСИОМАЛАРЫ

1.1. Статиканың негізгі ұғымдары

Материялық нүкте деп өлшемдері ескерілмей, белгілі массасы бар нүкте ретінде қарастырылып зерттелетін дене айтылады.

Материялық нүктелердің кез келген жиынтығын *материялық нүктелер жүйесі* деп атаймыз.

Материялық нүктелердің механикалық жүйесі деп әрбір нүктесінің кеңістіктегі орны және қозғалысы оның өзге нүктелерінің орындары мен қозғалыстарына тәуелді болатын материялық нүктелер жүйесі аталады.

Абсолют қатты дене деп кез келген екі нүктесінің арақашықтығы өзгермейтін, яғни геометриялық пішінін өзгертпей сақтай алатын денені айтады. Абсолют қатты ұғымы – *абстракциялық ұғым*.

Механикада денелердің тепе-тендігін, сонымен қатар оларға әсер ететін бір күштер жүйесін басқа эквивалентті жүйемен алмастыруды қарастыратын бөлімді *статика* деп атайды.

Статика деген сөз (грек тілінде – statike) бір орында тұру, қозғалмау, тыныштықта болу дегенді білдіреді. Басқаша айтқанда, статика, негізінен, екі мәселемен айналысады: біріншісі – заттық объектілерге әсер ететін күштер жүйесін қарапайым түрге келтіру; екіншісі – заттық объектілерге әсер ететін күштер жүйесінің тепе-тендік шарттарын белгілеу. Сондықтан статиканы қысқаша *күштер туралы ғылым* деп те атайды.

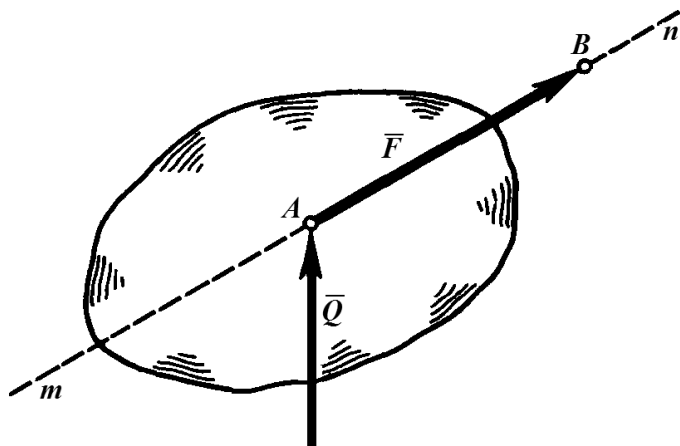
Күш. Табиғаттағы заттық денелер әрдайым өзара немесе қоршаған ортамен әсерде болады. *Күш* деп денелердің өзара механикалық әсерлерінің өлшемін атайды. Күнделікті тұрмыста, техника саласында күштің денеге әсері оның шамасы (модулі), бағыты және түсу нүктесі арқылы анықталатынын көреміз. Бұдан күшті *векторлық шама* деп қарастыруға болатындығы шығады.

Күш шамасы динамометрдің жәрдемімен өлшенетін салмақ арқылы анықталады. Механикада күштің өлшем бірлігі ретінде физикалық шамалардың өлшеу бірліктерінің халықаралық жүйесінде (СИ) 1 Ньютон алынады.

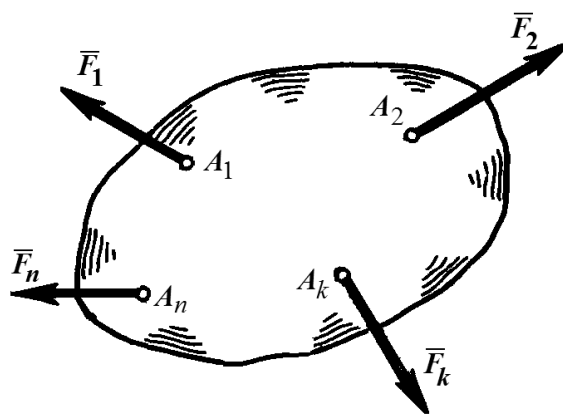
Ньютон деп массасы 1 кг денеге күш әсері бағытында 1 м/с^2 үдеу беретін күш алынады. Ньютонның еселік бірліктері – килоньютон ($1\text{ кН} = 10^3\text{ Н}$) және меганьютон ($1\text{ МН} = 10^6\text{ Н}$).

Күш векторы үстінде сызықшасы немесе жебесі бар латынның бас әріптерімен, мысалы, \vec{F} деп, ал күштің модулі сол әріппен белгіленеді.

Күшті кез келген вектор ретінде бағытталған кесіндімен бейнелеуге болады. Белгілі бір масштабта алынған AB кесіндінің ұзындығы (1.1-сурет) күш векторы \vec{F} -тың сан модулін бейнелейді, ал оның бағыты күштің әсер ету бағытына дәл келеді. A нүктесі вектордың бас нүктесі, ал B нүктесі вектордың ұшы деп аталады. Дененің күш әсер етіп тұрған A нүктесі **күштің түсу нүктесі**, ал бойымен \vec{F} күш векторы бағытталған $m-n$ сызығы **күштің әсер сызығы** деп аталады. Көптеген жағдайларда күш векторын вектордың ұшындағы нұсқар күштің түсу нүктесіне тірелгендей кескіндеу қолайлы (1.1-суреттегі \vec{Q} күш).



1.1-сурет



1.2-сурет

Қатты денеге бір мезетте бір ғана емес, бірнеше күш әсер етуі мүмкін (1.2-сурет). Оларды $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ деп белгілейік.

Күштер жүйесі. Қандай да бір денеге бір мезгілде әсер ететін күштер жиынын *күштер жүйесі* деп атайды.

Күштер жүйесі дөңгелек жақшалар ішінде алынған күш векторларымен белгіленеді. Мысалы, $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ – n күштен тұратын күштер жүйесі.

Әсер сызықтары әртүрлі жазықтықта жататын күштер жүйесі *кеңістіктік күштер жүйесі* деп аталады. Егер қарастырылатын күштер жүйесінің әсер сызықтары бір жазықтықта жататын болса, онда оларды *жазық күштер жүйесі* деп атайды. Әсер сызықтары бір нүктеде қиылысатын күштер жүйесі *жинақталатын күштер жүйесі* деп аталады. Әсер сызықтары параллель күштер жүйесі *параллель күштер жүйесі* деп аталады. Аталған күштер жүйесі кеңістіктік және жазық күштер жүйесін түзуі мүмкін.

Дененің механикалық күйін өзгертпей әсер етуші күштер жүйесін *тепе-теңдіктегі күштер жүйесі* деп немесе *нөлге эквивалентті (парапар) күштер жүйесі* деп атайды.

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim 0.$$

Денеге бірдей механикалық әсер етуші әртүрлі күш жүйелері *бір-біріне эквивалент жүйелер* деп аталады.

Егер $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ және $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_k)$ екі күш жүйесі болса, онда бұл анықтама былай жазылады:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_k).$$

Эквивалент екі күш жүйесінің қандай да бір денеге әсерлері бірдей болғандықтан, олардың біреуін екіншісімен алмастыруға болады.

Қатты денеге түсірілген $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ күштер жүйесі бір \bar{R} күшіне эквивалент болса, онда ол күшті берілген күштер жүйесінің *тең әсерлі күші* деп атайды:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim \bar{R}.$$

Берілген күштер жүйесінің теңестіруші күші осы жүйенің *теңгеруші күші* деп аталады.

Қандай да бір күштер жүйесінің **тең әсерлі және теңгеруші күштері** шама жағынан тең болып, денеге бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытта әсер етеді. Теңгерілген күштер жүйесінің тең әсерлі күші нөлге тең, басқаша айтқанда, теңестірілген күштер жүйесі нөлге эквивалентті.

Егер қатты денеге әсер етуші күштер жүйесі теңгерілген күштер жүйесін құрайтын болса, онда бұл дене тепе-теңдікте болады. Бұл тұжырымнан тыныштықта тұрған денемен қатар бірқалыпты түзу сызықты ілгерілемелі қозғалыстағы денені де тепе-теңдікте деп қарастыруға болады.

1.2. Статиканың аксиомалары

Дененің тепе-теңдікте болу шарттары өмірлік тәжірибеден алынған және дәлелдеусіз қабылданатын бірнеше жағдайға негізделіп қорытылады.

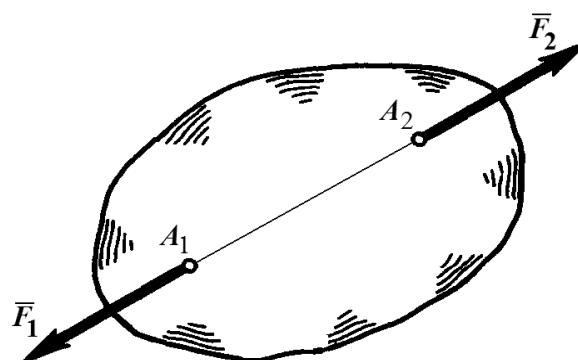
Оларды **статиканың аксиомалары** деп атайды.

Статиканың негізгі аксиомаларын ағылшын ғалымы Ньютон (1642-1727 жж.) тұжырымдаған, сондықтан да олар ғалымның атымен аталады.

1-аксиома (екпін аксиомасы немесе Ньютонның бірінші заңы). Қандай да бір күштер мәжбүр етпесе, дене тыныштықтағы немесе бірқалыпты түзу сызықты ілгерілемелі қозғалыстағы күйін сақтай алады.

Екпін немесе **екпіндік** деп қозғалыстағы заттық дененің күш әсері болмаса да, қозғалысын сақтайтын немесе күш әсерінен қозғалысын біртіндеп өзгертетін мүмкіндігін атайды.

2-аксиома (екі күштің тепе-теңдік шарты). Екі күш түскен еркін қатты дене тепе-теңдігі үшін күштердің модульдері тең және әсер сызықтары бір болып қарама-қарсы бағытталуы қажет және жеткілікті, яғни $(\vec{F}_1 = \vec{F}_2) \sim 0$, егер $F_1 = F_2$ және $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (1.3-сурет).



1.3-сурет

Басқаша айтқанда, екі күш тепе-теңдікте болуы үшін, олардың модульдері тең болуы және бір түзу бойымен қарама-қарсы бағытталуы қажет және жеткілікті.

3-аксиома (теңгерілген күштерді қосу не алып тастау туралы). Кез келген күштер жүйесіне нөлге эквивалент күштер жүйесін қосқаннан немесе одан алып тастағаннан берілген жүйенің қатты денеге жасайтын әсері өзгермейді.

Егер $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ және $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_k) \sim 0$ екі күш жүйесі болса, онда бұл аксиома былай жазылады:

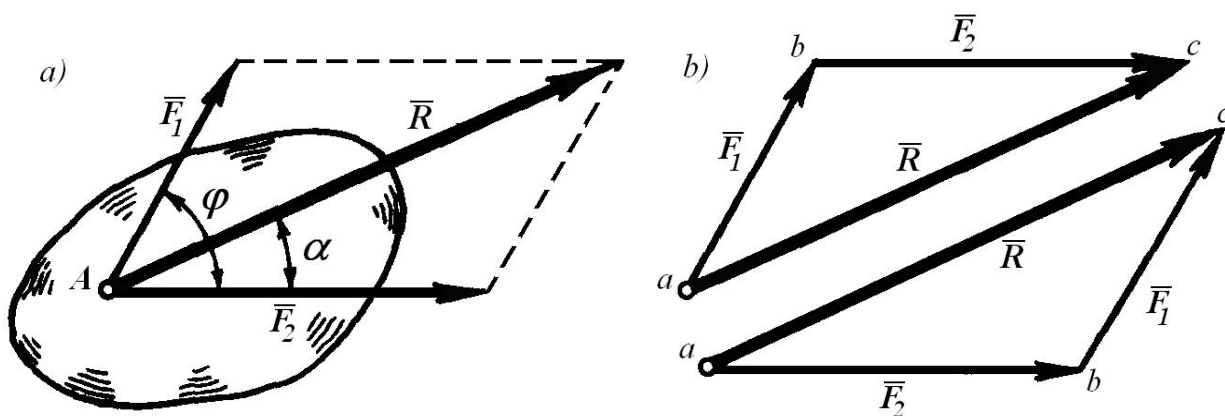
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \{(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n), (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_k)\}$$

4-аксиома (параллелограмм ережесі). Қатты дененің бір нүктесіне түсірілген екі күштің тең әсерлі күшінің шамасы мен бағыты берілген күштерден құрылған параллелограмм диагоналымен анықталады да, сол нүктеге түсіріледі.

Қабырғалары берілген векторлар болатын параллелограмм диагоналын тұрғызуды (1.4, а-сурет) **векторлық** немесе **геометриялық қосу** деп атайды. Демек, бір нүктеге түсірілген екі күштің тең әсерлі күші осы күштердің векторлық қосындысына тең:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

және сол нүктеге түсіріледі.

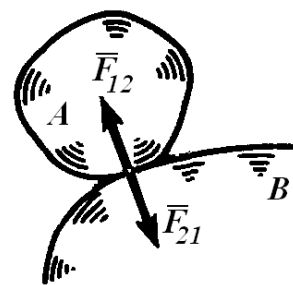


1.4-сурет

Күш параллелограммымен қатар екі жүйенің тең әсерлі күшін күш үшбұрышымен де анықтауға болады (1.4, b-сурет). Тең әсерлі күштің шамасы 1.4, b-суреттен көрінетіндей векторлардың қосылу тәртібіне байланысты емес, яғни $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$.

5-аксиома (әсер және қарсы әсер заңы). Екі дене бір-біріне әрқашан модульдері тең, бір түзу бойымен қарама-қарсы бағытталған күштермен әсер етеді.

Бұл аксиома Ньютонның үшінші заңы деп аталады. Бесінші аксиома механикада өте маңызды орын алады. Егер A денесі B денесіне \vec{F}_{12} күшімен әсер етсе, B денесі A денесіне дәл осы сияқты модульді \vec{F}_{21} күшімен қарама-қарсы бағытта әсер етеді (1.5-сурет). \vec{F}_{12} және \vec{F}_{21} күштерінің модульдері тең, ал бағыттары бір түзу бойымен қарама-қарсы бағытталса да, олар әр денеге түсірілгендіктен, теңгерілген күштер жүйесін құра алмайды. Бұл күштердің бірін тура әсер етуші күш деп қараса, екіншісі қарсы әсер күші болып табылады. Сонымен, аксиома бойынша әрбір әсерге оған тең және қарама-қарсы бағытталған қарсы әсер болады. Осыдан барып табиғатта сыңар күш болмайтыны, әрбір күшке үнемі онымен бірге екінші бір қарама-қарсы күш сәйкес келіп отыратыны байқалады.



1.5-сурет

6-аксиома (қатаю туралы). Деформацияланатын дене абсолют қатты денеге айналса да, механикалық күйі өзгермейді.

Басқаша айтқанда, берілген күштер жүйесі әсерінде тұрған деформацияланатын дене тепе-теңдігі, егер дене мезетте қатайса да, яғни абсолют қатты денеге айналса да, өзгермейді.

Бұл аксиомадан абсолют қатты дененің тепе-теңдігінің қажетті және жеткілікті болатын шарттарының деформацияланатын дене тепе-теңдігі үшін тек қажетті ғана болып, жеткілікті болмайтындығы көрінеді. Мысалы, егер күштер әсеріндегі резеңкеден жасалған дене оның тепе-теңдігі дене абсолют қатты денеге айналса да, сақталады. Ал бірақ та күштер тепе-теңдікте тұрған абсолют қатты дене бірден резеңкеден жасаған денеге айналса, онда дене тепе-теңдік күйін сақтай алмауы мүмкін.

1.3. Статиканың қарапайым теоремалары

Күшті әсер сызығы бойымен көшіру теоремасы. Кез келген күшті әсер ететін дененің механикалық күйін өзгертпей-ақ өзінің әсер сызығы бойымен басқа нүктеге көшіруге болады.

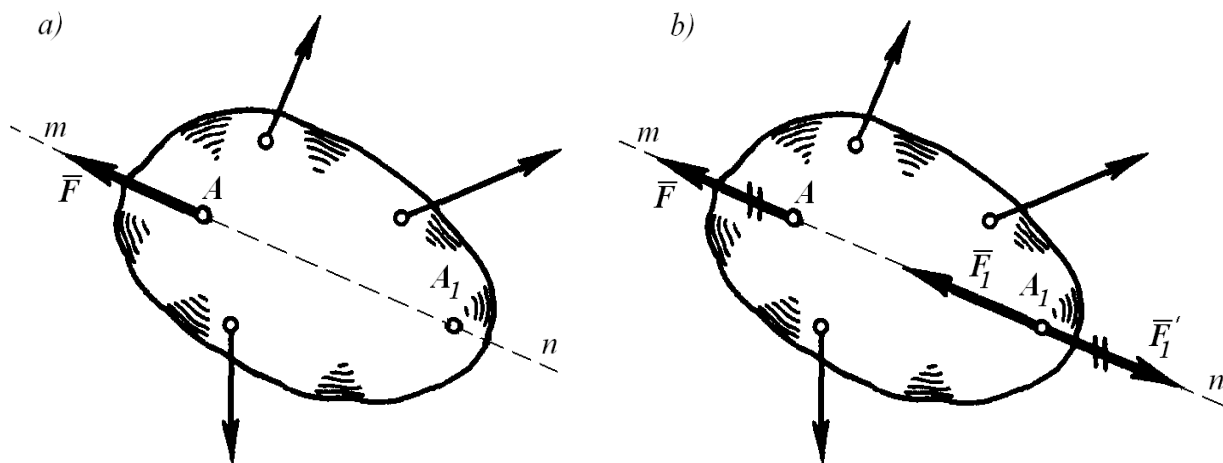
\bar{F} күші қатты дененің A нүктесіне түсірілген, осы күшті әсер сызығы $m-n$ бойындағы қандай да бір A_1 нүктесіне көшіру қажет делік (1.6, *a*-сурет). \bar{F} күшінің әсер сызығы бойымен A_1 нүктесіне өзара тең, қарама-қарсы бағытталған \bar{F}_1 және \bar{F}'_1 күштерін түсірейік (1.6, *b*-сурет). Бұл күштердің шамасы берілген \bar{F} күшінің шамасына тең болсын $F_1 = F'_1 = F$ және $\bar{F}_1 = \bar{F}'_1$, сондықтан да A_1 нүктесіндегі екі күш нөлге эквивалент болатын жүйе құрайды, онда $\{\bar{F}_1, \bar{F}'_1\} \sim 0$.

Үшінші аксиома бойынша $\bar{F} \sim \{\bar{F}, (\bar{F}_1, \bar{F}'_1)\}$.

Соңғы үш күштен тұратын жүйеде \bar{F}_1 және \bar{F}'_1 күштері екінші аксиома бойынша $\{\bar{F}_1, \bar{F}'_1\} \sim 0$.

Олай болса, үш күштен тұратын жүйеден оларды алып тастауға болады.

$$\bar{F} \sim \{\bar{F}, (\bar{F}_1, \bar{F}'_1)\} \sim \{\bar{F}_1, (\bar{F}, \bar{F}'_1)\} \sim \bar{F}_1.$$



1.6-сурет

Бұл дегеніміз – A нүктесіне түсірілген \bar{F} күшін әсер сызығы бойынша A_1 нүктесіне көшірілгенмен парапар (1.6, *b*-сурет). Теорема дәлелденді.

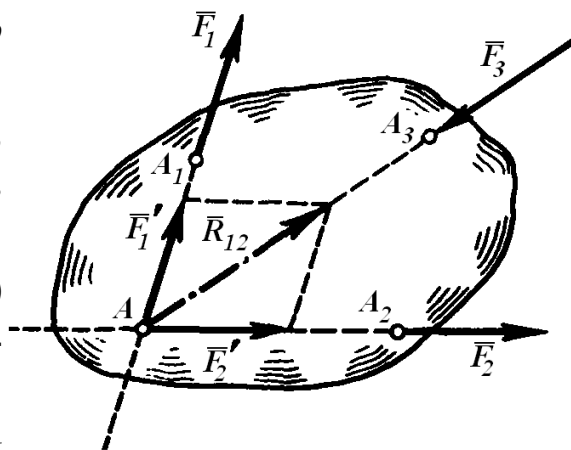
Сонымен, денеге әсер ететін \bar{F} күшін өзінің әсер ету сызығының бойымен кез келген нүктеге көшіруге болады.

Әсер сызығы бойынша көшіруге болатын векторларды **сырғыма векторлар** деп атайды. Демек, қатты денеге әсер етуші күштер сырғыма векторлар болып табылады.

Үш күш туралы теорема. Егер өзара параллель емес, бір жазықтықта жататын үш күш тепе-теңдіктегі күштер жүйесін

құрайтын болса, онда күштердің әсер сызықтары бір нүктеде қиылысады.

Қатты дененің A_1, A_2, A_3 нүктелерінде бір жазықтықта жатқан, өзара параллель емес $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ күштері берілсін делік (1.7-сурет) және \vec{F}_1, \vec{F}_2 күштерінің әсер сызықтары бір нүктеде қиылысатын болсын. \vec{F}_1 және \vec{F}_2 күштерін әсер сызықтары бойымен A нүктесіне (\vec{F}'_1, \vec{F}'_2) көшіріп, параллелограмм ережесі бойынша осы күштердің тең әсерлі күшін анықтайық



1.7-сурет

$$\{\vec{F}'_1, \vec{F}'_2\} \sim \vec{R}_{12}.$$

Олай болса,

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \sim \{(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2), \vec{F}_3\} \sim \{\vec{R}_{12}, \vec{F}_3\}.$$

Теорема шарты бойынша:

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \sim 0.$$

Сондықтан:

$$\{\vec{R}_{12}, \vec{F}_3\} \sim 0.$$

Екінші аксиомаға сәйкес, екі күштің тепе-теңдікте болуы үшін олар бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытталулары қажет. Олай болса, \vec{F}_3 үшінші күштің де әсер сызығы A нүктесінен өтуге тиіс. Сонымен, теорема дәлелденді.

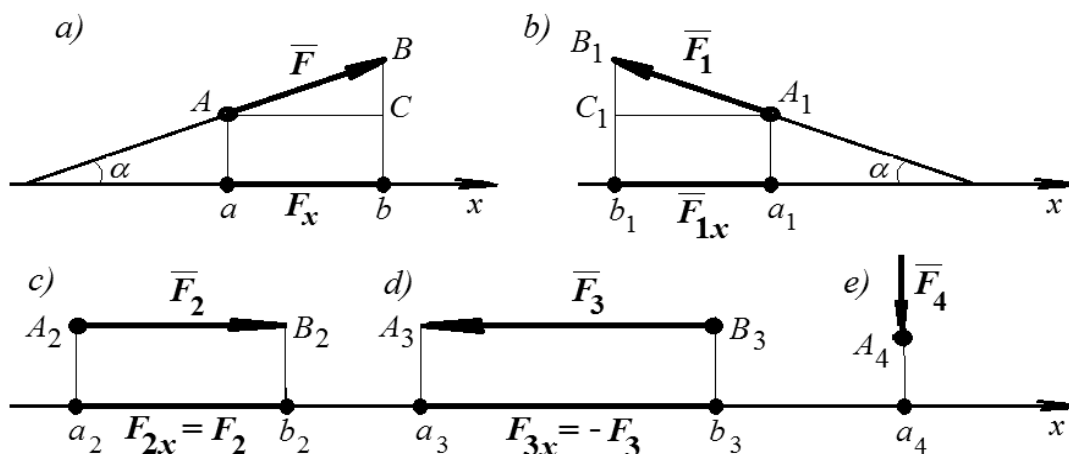
1.4. Күштің өске проекциясы

Белгілі бағытталған түзу сызықты *өс* деп атайды. **Күштің өске проекциясы** деп күш векторының ұштарынан өске түсірілген екі перпендикулярмен шектелген, өстің бағытталған кесіндісі аталады. Егер кесінді бағыты өстің оң бағытымен сәйкес келсе, күштің өске проекциясы **оң таңбалы** деп есептеледі. Егер кесінді бағыты өстің оң

бағытына қарама-қарсы болса, күштің өске проекциясы *теріс таңбалы* делінеді.

\vec{F} күші мен Ox өсі берілген делік (1.8, *a*-сурет). \vec{F} күшінің Ox өсіне проекциясы ab кесіндісімен кескінделген және ab проекциясы оң таңбалы.

1.8, *a*-суретте көрсетілгендей, $F_x = ab$, ал $\triangle ABC$ үшбұрышынан $AC = F \cos \alpha$, олай болса:



1.8-сурет

$$F_x = F \cos \alpha. \quad (1.1)$$

Сонымен, күштің өске проекциясының шамасы осы күштің модулін өстің оң бағыты мен күштің бағыты арасындағы бұрыштың косинусына көбейткенге тең.

Егер күш пен өстің оң бағыты арасындағы бұрыш сүйір болса, (1.1) өрнегі күштің проекциясы оң таңбалы болатынын көрсетеді.

Егер күш векторының өстің оң бағытымен жасайтын бұрышы доғал болса, күштің проекциясы теріс таңбалы болады, яғни $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ болса, онда (1.8, *b*-сурет):

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha = F_1 \cos(\pi - \beta) = -F_1 \cos \beta.$$

Егер күш берілген өске параллель болса, онда оның проекциясы сәйкес таңбамен алынған күштің модуліне тең (1.8, *c*, *d*-сурет), яғни $F_{2x} = F_2$, $F_{3x} = -F_3$.

Егер күш берілген өске перпендикуляр болса, онда оның проекциясы нөлге тең (1.8, е-сурет), яғни

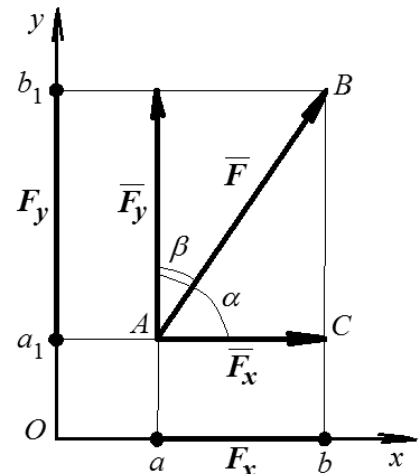
$$F_{4x} = F_4 \cos 90^\circ = 0.$$

xOy жазықтықтың A нүктесіне түсірілген \vec{F} күшін Ox және Oy өстеріне проекциялайық. \vec{F} күші мен оның F_x және F_y проекциялары 1.9-суретте көрсетілген:

$$F_x = F \cos \alpha; \quad F_y = F \cos \beta.$$

Егер күштің өзара перпендикуляр F_x және F_y екі проекциясының шамалары белгілі болса, күштің модулі мен күш векторының бағытын анықтауға болады. Ол үшін $\triangle ABC$ үшбұрышын қарастырсақ, онда күштің модулі:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (1.2)$$



1.9-сурет

Ал күштің бағыттауыш косинустары:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}. \quad (1.3)$$

\vec{F} күшін координат өстеріне параллель екі \vec{F}_x және \vec{F}_y күштерінің тең әсерлі күші іспетті қарастыруға болатынын айта аламыз (1.9-сурет). \vec{F} күшінің құраушы күштері \vec{F}_x және \vec{F}_y векторлық шама, күштің проекциялары F_x пен F_y алгебралық шама болғандықтан, күштің құраушылары мен проекциялары бір-бірінен өзгеше шамалар болып табылады.

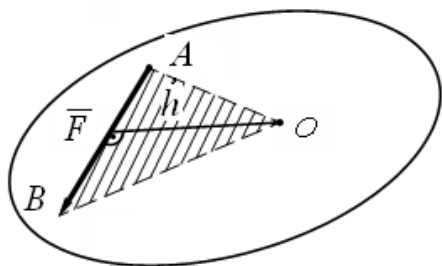
1.5. Күш моменті. Күштің нүктеге қатысты моменті

Қатты дененің өзіне түсірілген күш әсерінен тек ілгерілей қозғалып қоймай, сонымен қатар белгілі бір нүктеге қатысты айнала да қозғалатыны тұрмыста белгілі. Күштің денеге айналдырушы әсері **күш моменті** деген ұғыммен сипатталады.

Күштің нүктеге қатысты моменті деген ұғымды механикаға енгізген – Қайта өрлеу дәуірінің итальяндық ғалымы және суретшісі Леонардо да Винчи (1452-1519).

Күштің нүктеге қатысты моменті деп плюс не минус таңбамен алынған күш модулі мен осы нүктеден күштің әсер сызығына дейін түсірілген перпендикулярдың ұзындығына көбейтіндісін айтады.

\vec{F} күші O нүктесінде бекітілген денені осы нүктеге қатысты айналдыруға тырысады делік (1.10-сурет), онда күш моменті:



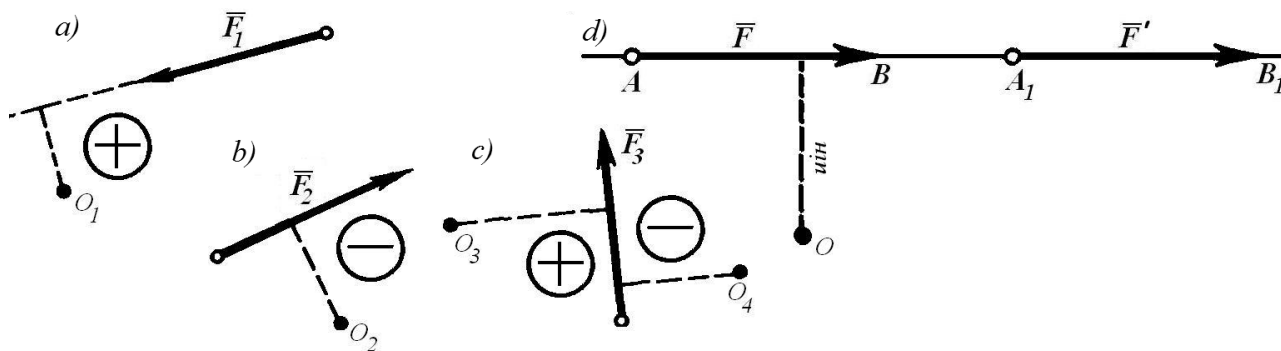
1.10-сурет

$$M_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (1.4)$$

O нүктесі, оған қатысты күш моменті алынатындықтан, **момент центрі** деп, ал O нүктесінен күштің әсер сызығына дейін түсірілген h перпендикуляр ұзындығын күштің осы нүктеге қатысты **иіні** деп атаймыз.

Күш моментінің *СИ* жүйесіндегі өлшем бірлігі ньютонметр, яғни $[M] = [F] \cdot [h] = \text{Н} \cdot \text{м}$.

Егер күш денені берілген нүктеге қатысты *сағат тілі* айналысына кері бағытта айналдыруға тырысса, онда күш моменті оң таңбалы (1.11, *a*-сурет), ал егер *сағат тілі* айналысымен бағыттас айналдыруға тырысса, онда күш моменті теріс таңбалы деп алу (1.11, *b*-сурет) ұйғарылған.



1.11-сурет

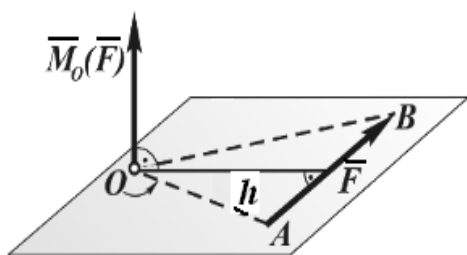
Бір күштің өзі әртүрлі нүктелерге қарағанда оң және теріс таңбалы момент бере алады (1.11, *c*-сурет).

Күштің әсер сызығы бойындағы жататын нүктеге қатысты алынған күш моменті нөлге тең, өйткені бұл жағдайда күш иіні нөлге тең.

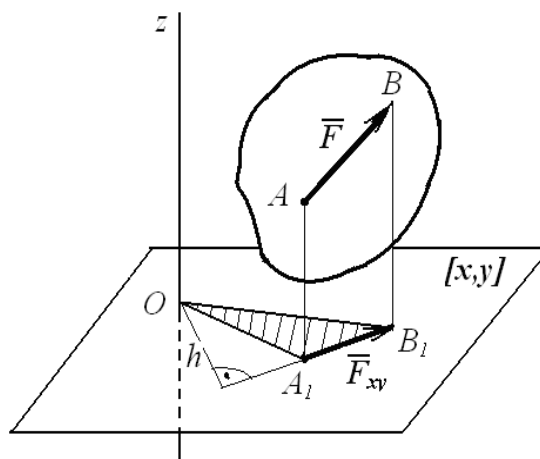
Күштің түсу нүктесін оның әсер сызығы бойымен жылжытудан күш моменті өзгермейді (1.11, *d*-сурет).

Сонымен, күш моментінің шамасы мен бағыты (таңбасы) момент алынатын нүктенің орнына тәуелді екеніне көз жеткіземіз.

Күштің нүктеге қатысты векторлық моменті деп осы нүктеге түсірілген және шамасы күш модулі мен осы нүктеге қатысты иіннің көбейтіндісіне тең векторды айтады (1.12-сурет). Күш моментінің векторы күш және моменттік нүкте жатқан жазықтыққа перпендикуляр, сонымен қатар ұшынан қарсы қарағанда күштің денені сағат тілі жүрісіне қарама-қарсы айналдыруға тырысатын бағытта түсіріледі.



1.12-сурет



1.13-сурет

Күштің өске қатысты моменті. z өсімен қиылыспайтын және оған параллель емес \vec{F} күші әсерінен z өсінің төңірегінде айналу мүмкіншілігі бар денені қарастырайық (1.13-сурет). Күштің z өсіне қатысты моментін табу үшін \vec{F} күшін осы өске перпендикуляр жазықтыққа (x жазықтығы) проекциялау керек. Бұл проекцияны \vec{F}_{xy} арқылы белгілейік. Осыдан кейін осы проекцияның z өсімен x жазықтығының қиылысатын O нүктесіне қатысты моментін табамыз:

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} \cdot h. \quad (1.5)$$

Сонымен, мынаны тұжырымдаймыз: күштің өске қатысты моменті күштің өске перпендикуляр жазықтықтағы проекциясының, өс пен жазықтықтың қиылысу нүктесіне қатысты моментінің алгебралық шамасына тең. Бұл моменттің таңбалары

күштің нүктеге қатысты моментіне ұқсас анықталады. Егер күштің әсер сызығы өс арқылы өтетін болса немесе өске параллель болса, онда күштің өске қатысты моменті нөлге тең.

1.6. Байланыстар мен олардың реакциялары

Механикада еркін және еркін емес денелер қарастырылады. Кеңістіктегі кез келген бағытта қозғала алатын дене **еркін дене** деп аталады. Егер дененің кеңістіктегі қозғалысы қандай да бір басқа денемен шектелген болса, онда ол **еркін емес дене** деп аталады. Берілген дененің қозғалысын шектейтін денені **байланыс** деп атайды. Дененің байланысқа әсер ететін күшін **қысым күші**, ал байланыстың денеге әсер күшін **байланыс реакциясы** немесе жай ғана **реакция** деп атайды. Өзара әсер заңы негізінде, бұл күштер – бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытта әсер ететін күштер. Сонымен қатар бұлар әр денеге түскендіктен, күштер жүйесін құра алмайды.

Денеге әсер ететін күштер **актив** және **реактив күштер** болып екіге бөлінеді. Тыныштықтағы денені қандай да бір қозғалысқа келтіре алатын күшті **актив күш** деп, осы қозғалысқа кедергі болатын күшті **реактив күш** деп атайды. Актив күштердің модульдері мен бағыттары алдын ала беріледі және денеге әсер ететін басқа күштерге тәуелсіз болады, ал реактивті күштердің шамалары мен бағыттары көп жағдайда алдын ала белгісіз және денеге әсер етуші актив күштерге тәуелді болады. Актив күшті **жүктеме** деп те атайды.

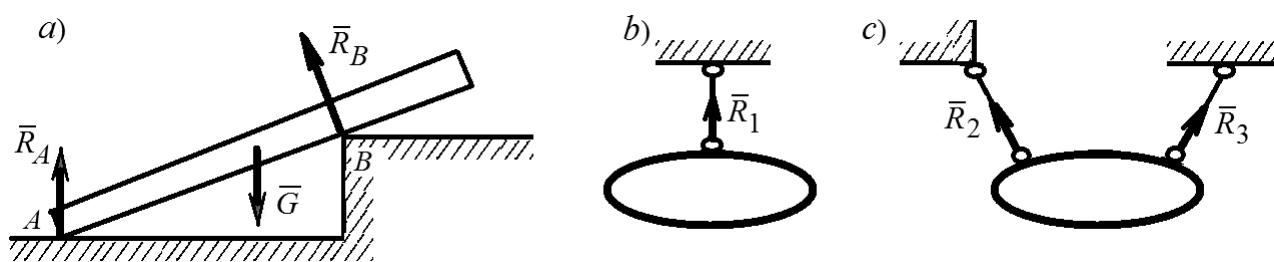
Статиканың көптеген есептерін шешкенде, еркін емес денені еркін дене ретінде қарастырады. Ол мүмкіндік **байланыстар аксиомасы** немесе **дененің босану ережесіне** негізделген. Бұл аксиома былай тұжырымдалған: *байланыстарды алып тастап, оларды реакциялармен алмастыру арқылы кез келген еркін емес денені актив және реактив күштер әсеріндегі еркін дене ретінде қарастыруға болады.*

Реакциялардың модульдері мен бағыттары алдын ала белгісіз, модульдері актив күштердің модульдеріне тәуелді болса, бағыттары дененің қандай бағыттағы мүмкіндік қозғалысын байланыстардың шектейтініне байланысты.

Енді конструкцияларда кездесетін байланыстардың негізгі түрлеріне тоқталып, олардың реакцияларының мүмкін болатын бағыттарын көрсетейік.

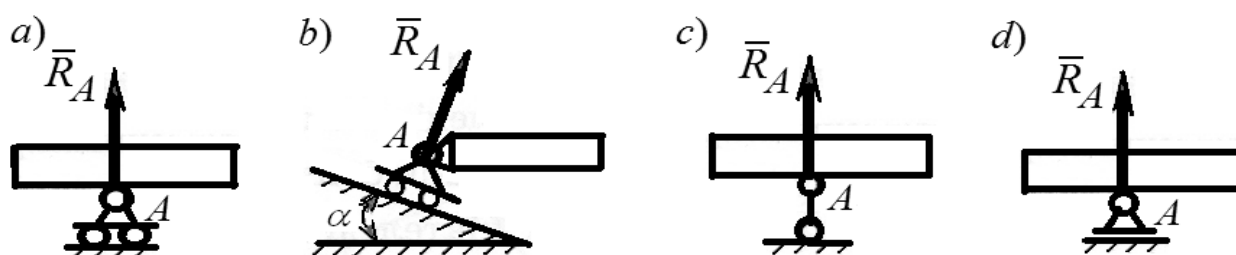
1) **Идеал тегіс бет.** Идеал тегіс беттің реакциясы әр уақытта да жанасушы беттерге ортақ нормаль бойымен бағытталады (1.14, *a*-сурет).

2) **Иілгіш байланыс.** Мұндай байланысқа абсолют созылмайтын және салмақсыз деп құрастырылатын жіп, арқан және шынжыр жатады. Иілгіш байланыстар тек созылған жағдайда ғана жұмыс істейді, сондықтан реакциялары олардың бойымен байланыстардың ілінген нүктелеріне қарай бағытталады (1.14, *b, c*-сурет).



1.14-сурет

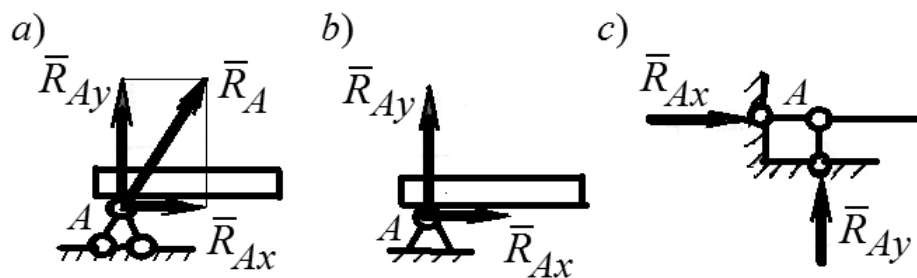
3) **Жылжымалы топсалы жазық тірек.** Жылжымалы топса дененің тіреу жазықтығымен қозғалыс жасауына кедергі келтірмейді де, оған перпендикуляр бағыттағы қозғалысын шектейді. Сондықтан да оның реакциясы әрдайым тіреу жазықтығына перпендикуляр бағытталады (1.15, *a, b*-сурет).



1.15-сурет

Жылжымалы топсалы тіректердің шартты белгілену түрлері 1.15, *c, d*-суреттерде көрсетілген.

4) **Жылжымайтын топсалы жазық тірек.** Мұндай тірек денеге топсаны емін-еркін айнала қозғалуына мүмкіндік береді де, оның топса өсіне перпендикуляр кез келген бағыттағы ілгерілемелі қозғалысын шектейді (1.16, *a*-сурет).

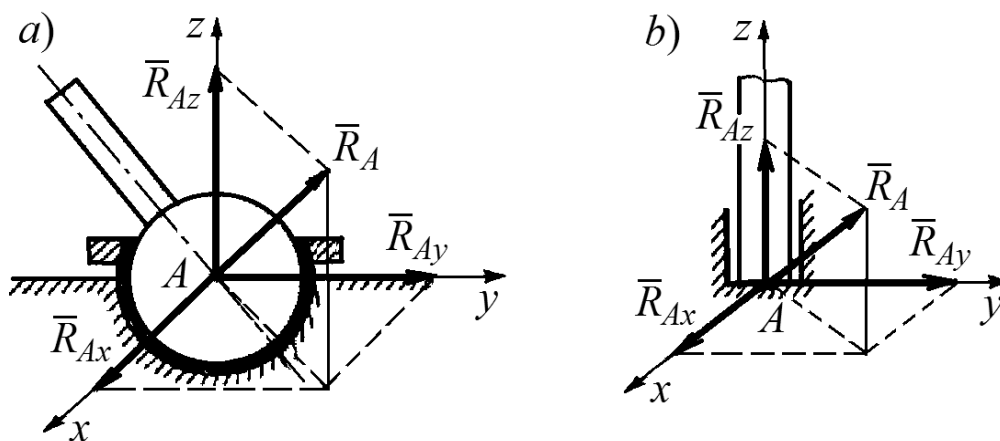


1.16-сурет

Демек, жүктелген дененің топса өсіне перпендикуляр жазықтықта қандай бағытта тірекке әсер ететіні алдын ала белгісіз. Сөйтіп, \bar{R} реакциясы бұл жазықтықта кез келген бағытта болуы мүмкін (1.16, *a*-сурет). Бағыты да, шамасы да белгісіз, толық \bar{R} реакцияның орнына әдетте оның координаттық өстердегі проекциялары анықталады. Егер \bar{R}_x және \bar{R}_y проекциялары белгілі болса, онда толық \bar{R} реакцияның шамасы мен бағытын 4-аксиома бойынша анықтауға болады. 1.16, *b*, *c*-суреттерде жылжымайтын топсалы тіректің шартты кескіндеулері көрсетілген.

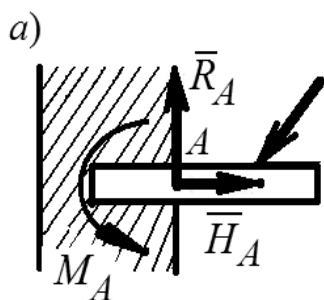
5) **Жылжымайтын сфералық топсалы тірек.** Бұл топса денеге кеңістікте әсер ететін жағдайда пайдаланылады. Сфералық топса дененің бір нүктесін қозғалмайтын етіп бекітеді. Дене осы бекітілген нүктесі арқылы өтетін өспен айнала алады. Қозғалмайтын нүктедегі реакция кеңістікте кез келген бағытта болуы мүмкін. Сондықтан да ол өзінің \bar{R}_{Ax} , \bar{R}_{Ay} , \bar{R}_{Az} проекциялары арқылы ізделеді (1.17, *a*-сурет).

6) **Жылжымайтын өкшелі тірек.** Бұл тірек цилиндрлік топса мен жазықтық беттің байланысынан болады. Реакцияның бағыты да, шамасы да алдын ала белгісіз, оның орны мен шамасы координаттық өстердегі \bar{R}_{Ax} , \bar{R}_{Ay} , \bar{R}_{Az} жіктеулері арқылы анықталады (1.17, *b*-сурет).

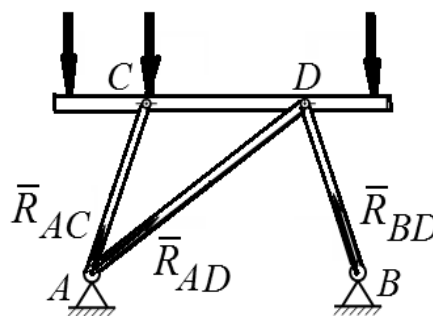
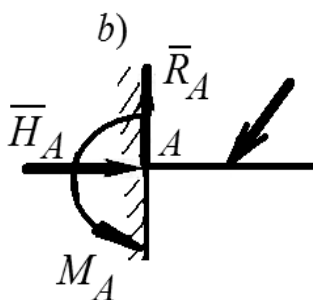


1.17-сурет

7) **Қатаң байланыс (тірек).** Бұл тірек өзіне бекітілген дененің екі (жазық және тік) бағытта қозғалуына және дененің тірекке қарағанда бұрылуына мүмкіндік бермейді (1.18, *a*-сурет). Қатаң тіректің шартты кескіндеуі 1.18, *b*-суретте көрсетілген. Мұндай тіректің үш реакциясы бар: тік бағыттағы \bar{R}_A , горизонталь (жазық) бағыттағы \bar{H}_A және момент M_A . Бұл реакциялардың бағыттары мен шамалары алдын ала белгісіз болады.



1.18-сурет



1.19-сурет

8) **Қатаң стержень немесе стерженьді байланыс.** Мұндай байланыс ұштарында топсасы бар, салмақсыз түзу стерженьмен жүзеге асырылады және сыртқы күш тек оның ұштарына түсетін болса, оның $\bar{R}_{AC}, \bar{R}_{AD}, \bar{R}_{BD}$ реакциялары тек стержень бойымен бағытталады (1.19-сурет).

1.7. Есептерді шешудің әдістемесі

А) Күштерді құрама күштерге жіктеу

1.1-мысал. Горизонталь оңға бағытталған \bar{F}_1 күш векторымен $\alpha = 60^\circ$ бұрыш жасайтын \bar{F}_2 күш векторының қосындысын анықтаңыз (1.20, *a*-сурет). Күштердің модульдері: $F_1 = 10 \text{ Н}$, $F_2 = 8 \text{ Н}$.

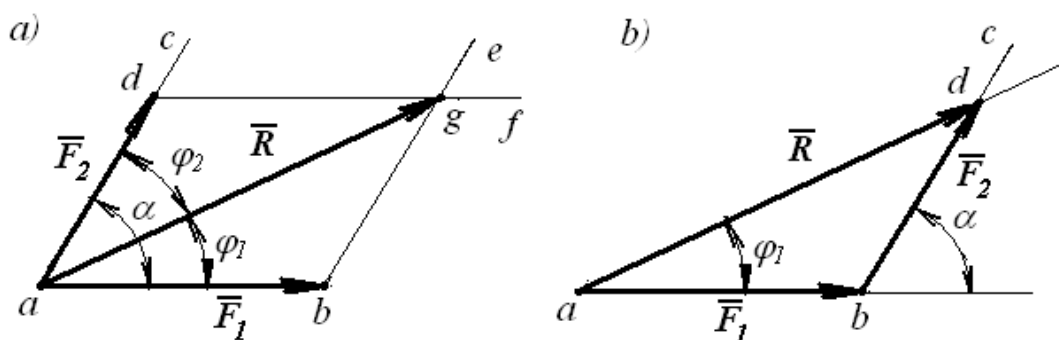
Шешуі: 1. *Параллелограмм ережесімен шешу.* Векторларды тұрғызудың масштабын таңдап алайық. Белгілідей, \bar{F} күш векторын кескіндейтін кесіндінің ұзындығы l күштің модуліне тура пропорционал:

$$F = \mu \cdot l,$$

мұндағы пропорционалдық коэффициент μ – векторларды тұрғызудың масштабы.

Егер \vec{F}_1 күш векторының модулін $ab = 40$ мм кесіндімен кескіндейтін болсақ, онда осы есеп үшін күш векторларды тұрғызудың масштабы:

$$\mu = \frac{F_1}{ab} = \frac{10}{40} = 0,25 \text{ Н/мм.}$$



1.20-сурет

Жазықтықтағы кез келген a нүктесінен бастап \vec{F}_1 күшін $ab = 40$ мм кесіндімен кескіндейік (1.20, a -сурет). Мұнан кейін транспортирдің көмегімен a нүктесінен ab сызығына $\alpha = 60^\circ$ бұрышпен \vec{F}_2 күшінің бағыты ac сызығын жүргізейік.

\vec{F}_2 күш векторын кескіндейтін ad кесіндісінің ұзындығын анықтайық:

$$ad = \frac{F_2}{\mu} = \frac{8}{0,25} = 32 \text{ мм.}$$

ac сызығына a нүктесінен бастап $ad = 32$ мм кесіндісін түсіріп және a -дан d нүктесіне бағытын көрсетіп, \vec{F}_2 күш векторын аламыз.

$de \parallel ad$ және $df \parallel ab$ түзулерін жүргізіп, қиылысу нүктесін g деп белгілеп, $abgd$ параллелограммын аламыз.

a және g нүктелерін қоссақ, параллелограмм диагонали ag тұрғызылады. Ол ізделіп отырған \vec{F}_1 және \vec{F}_2 күштерінің қосындысы болатын, модулі мен бағыты кескінделген \vec{R} күш векторын береді.

Геометриядан тікелей өлшеп, $ag \approx 63 \text{ мм}$ екенін анықтап, \bar{R} күш векторының модулін есептейміз:

$$R = \mu \cdot ag = 0,25 \cdot 63 = 15,8 \text{ Н}.$$

Транспортирдің көмегімен \bar{R} күш векторы бағытының тұрғызылған \bar{F}_1 және \bar{F}_2 күш векторларының бағыттары арасындағы бұрыштары анықталады:

$$\varphi_1 = \angle(\bar{F}_1, \bar{R}) = 26^\circ, \quad \varphi_2 = \angle(\bar{F}_2, \bar{R}) = \alpha - \varphi_1 = 34^\circ$$

\bar{F}_1 және \bar{F}_2 күш векторларын бір \bar{R} күш векторымен алмастыруға болады, оның модулі $R = 15,8 \text{ Н}$ және оның әсер ету бағыты бірінші күш векторының әсер ету бағытымен 26° бұрыш құрайды.

2. *Үшбұрыштық ережемен шешу.* Векторларды тұрғызудың басқаша масштабын тандап алайық.

\bar{F}_1 күш векторы модулін $ab = 25 \text{ мм}$ кесіндімен кескіндесек, онда масштаб:

$$\mu = \frac{F_1}{ab} = \frac{10}{25} = 0,4 \text{ Н/мм}.$$

Кез келген a нүктесінен \bar{F}_1 күшін $ab = 25 \text{ мм}$ кесіндімен кескіндейік (1.20, b -сурет). Мұнан кейін тұрғызылған күш векторының b ұшынан $\alpha = 60^\circ$ бұрышпен bc сызығын жүргізейік.

\bar{F}_2 күш векторын кескіндейтін bd кесіндісінің ұзындығын анықтайық:

$$bd = \frac{F_2}{\mu} = \frac{8}{0,4} = 20 \text{ мм}.$$

bc сызығына $bd = 20 \text{ мм}$ кесіндісін түсірейік. Онд ab -дан d нүктесіне бағытын көрсетіп, \bar{F}_2 күш векторын аламыз.

Бірінші күш векторының бас нүктесі a мен екінші күш векторының соңғы нүктесі d -ны өзара қосып, ad кесіндісін аламыз, ал одан кейін a -дан d нүктесіне бағытын көрсетіп, ізделіп отырған екі күш векторларының қосындысы \bar{R} күш векторын аламыз.

ad -ны өлшейміз:

$$ad = 39 \text{ мм.}$$

Сондықтан да \bar{R} күш векторының модулі:

$$R = \mu \cdot ad = 0,4 \cdot 39 = 15,6 \text{ Н.}$$

Транспортирдің көмегімен \bar{R} күш векторы бағытының тұрғызылған \bar{F}_1 күш векторының бағыты арасындағы бұрышы анықталады:

$$\varphi_1 = \angle(\bar{F}_1, \bar{R}) = 26^\circ,$$

Сонымен, есептің шешімі бірінші есептеудің нәтижесімен сәйкес келеді.

3. *Геометриялық тәсілмен шешу.* Параллелограмм ережесімен шешуде келтірілген тәсілмен $abgd$ параллелограммасын тұрғыза-мыз. Параллелограмм диагоналы ag берілген күш векторларының арасындағы α бұрышын ізделіп отырған екі φ_1 және φ_2 бұрыштарына бөледі. Параллелограмм диагоналы \bar{F}_1 және \bar{F}_2 күштерінің қосындысы болатын \bar{R} күш векторын береді. Қосынды күштің модулі косинустар теоремасынан өрнектелетін келесі формуладан анықталады:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \beta},$$

мұндағы β – \bar{F}_1 және \bar{F}_2 күш векторларының арасындағы бұрыш.

1.20, a -суретіндегі abg үшбұрышын қарастырсақ: $\angle abg = 180^\circ - \alpha$, $ab = F_1$, $bg = F_2$, $ag = R$. Олай болса, қосынды күштің модулі:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

Оған берілген шамалардың сан мәндерін қойғаннан кейін

$$R = \sqrt{10^2 + 8^2 + 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{100 + 64 + 80} = 15,6 \text{ Н}$$

аламыз.

Қосынды күш векторының бағытын, φ_1 бұрышын немесе φ_2 бұрышын, синустар теоремасы бойынша анықтаймыз:

$$\frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin \alpha},$$

онда

$$\sin \varphi_1 = \frac{F_2 \sin \alpha}{R} = \frac{8 \cdot \sin 60^\circ}{15,6} = 0,445.$$

Брадис кестесінен

$$\varphi_1 = 26^\circ 20'$$

анықтаймыз.

Сонымен, қосынды \bar{R} күш векторының модулі $R = 15,6 \text{ Н}$ және оның әсер ету бағыты бірінші күш векторының әсер ету бағытымен $26^\circ 20'$ бұрыш құрайды.

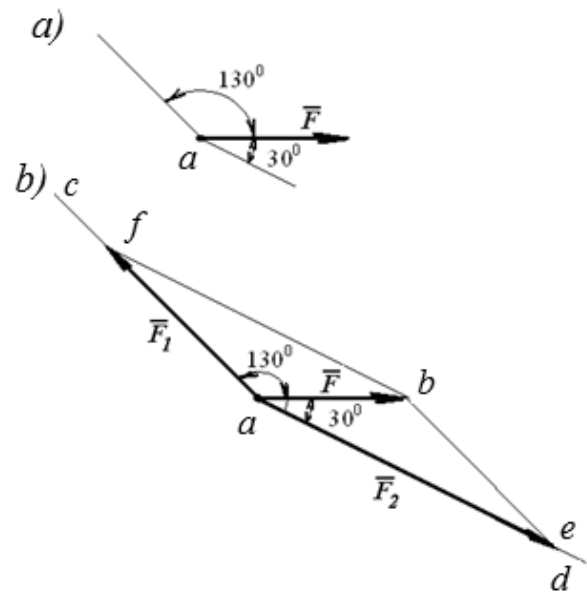
1.2-мысал. Оңға горизонталь бағытталған, модулі $F = 40 \text{ Н}$, \bar{F} күш векторын 130° және -30° бұрыштармен бағытталған екі құрама күш векторларына жіктеңіз (1.21, a-сурет).

Шешуі: 1. Параллелограмм ережесімен есептеу. Кез келген a нүктесінен \bar{F} күшін $ab = 20 \text{ мм}$ кесіндімен кескіндейік (1.21, b-сурет).

Тұрғызу масштабы

$$\mu = \frac{F}{ab} = \frac{40}{20} = 2 \text{ Н/мм}.$$

Транспортирдің көмегімен a нүктесінен 130° және -30° бұрышпен сәйкес күштердің бағытында ac және ad сызықтарын, ал b нүктесінен $de \parallel ac$ және $df \parallel ad$ түзулерін жүргіземіз. Тұрғызылған $afbe$ параллелограммның af және ae қабырғалары ізденді \bar{F}_1 және \bar{F}_2 күш векторларын кескіндейді (1.21, b-сурет).



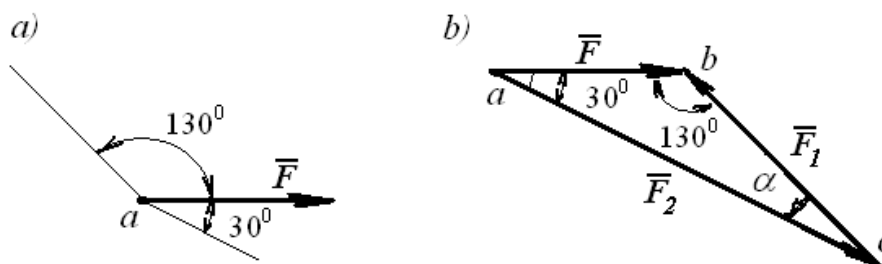
1.21-сурет

af және ae қабырғаларын өлшеп, $af = 29$ мм. $ae = 44$ мм екенін анықтаймыз, олай болса:

$$F_1 = 2 \cdot 29 = 58 \text{ H};$$

$$F_2 = 2 \cdot 44 = 88 \text{ H}.$$

2. Геометриялық тәсілмен шешу. Күш векторын екі құрама күш векторларына жіктеуге үшбұрыш ережесін қолдану ыңғайлы. Сондықтан кез келген a нүктесінен \vec{F} күшін ab кесіндімен кескіндейміз (1.22, b -сурет). Сонан кейін a және b нүктелерінен ізденді күш векторларының бағыттарына параллель түзулер жүргіземіз, олардың қиылысу нүктесін c деп белгілеп, abc үшбұрышын тұрғызамыз. Оның ab қабырғасы мен барлық бұрыштары белгілі, ал $\vec{ac} = \vec{F}_2$, $\vec{bc} = \vec{F}_1$ ізденді құраушы күштер (1.22, b -сурет).



1.22-сурет

Тұрғызылған үшбұрышқа синустар теоремасын қолданып:

$$\frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin \alpha},$$

қатынастарын аламыз, мұндағы $\alpha = 180^\circ - (\varphi_1 + \varphi_2) = 20^\circ$.

Онда

$$F_1 = \frac{F \sin \varphi_2}{\sin \alpha} = \frac{40 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} = 58,5 \text{ H};$$

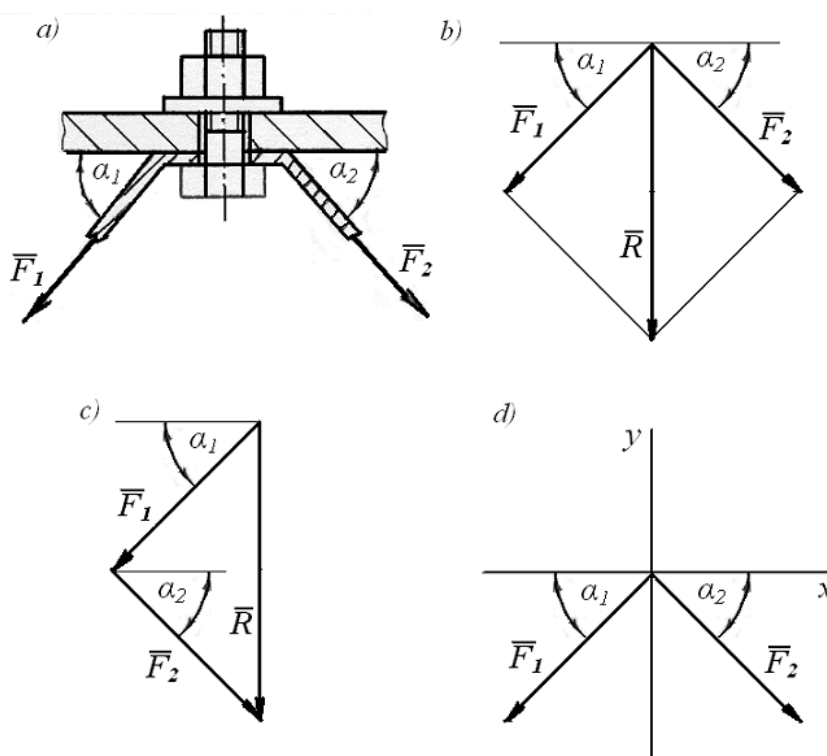
$$F_2 = \frac{F \sin \varphi_1}{\sin \alpha} = \frac{40 \cdot \sin 130^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{40 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} = 89,6 \text{ H.}$$

Сонымен, \bar{F} күші модульдері $F_1 = 58,5 \text{ H}$ және $F_2 = 89,6 \text{ H}$ екі құрама күш векторларына жіктелді.

1.3-мысал. $F_1 = F_2 = 2000 \text{ H}$ және $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$. Бұрандамаға әсер ететін күшті анықтаңыз (1.23-сурет).

Шешуі: Бұрандамаға әсер ететін күш \bar{F}_1 және \bar{F}_2 күштерінің тең әсерлі күшіне тең, оны параллелограмм ережесімен, геометриялық немесе аналитикалық тәсілдермен анықтауға болады.

Параллелограмм ережесі бойынша, тең әсерлі күш \bar{R} , \bar{F}_1 және \bar{F}_2 векторларымен тұрғызылған параллелограммның диагоналы болып табылады. (1.23, b-сурет).



1.23-сурет

Геометриялық тәсіл бойынша, \bar{R} тең әсерлі күшін анықтау үшін, үшбұрыш ережесін қолданып, \bar{F}_1 және \bar{F}_2 векторларынан күштік үшбұрышын тұрғызу қажет (1.23, c-сурет). Синустар теоремасы бойынша:

$$\frac{R}{\sin 90^\circ} = \frac{F_1}{\sin 45^\circ} = \frac{F_2}{\sin 45^\circ}.$$

Мұнан тең әсерлі күш

$$R = \frac{F_1 \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{F_2 \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{2000 \cdot 1}{0,7071} = 28284 \text{ Н},$$

немесе косинустар теоремасы бойынша:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos 90^\circ} = 2828,4 \text{ Н}.$$

Аналитикалық тәсілмен анықтағанда, xOy координаттар жүйесін таңдап алып, бас нүктесіне \vec{F}_1, \vec{F}_2 күштерін түсіріп, тең әсерлі күштің R_x және R_y проекцияларын, содан кейін $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ формуласы бойынша тең әсерлі күштің шамасын табамыз. Тең әсерлі күштің өске проекциясы барлық күштердің осы өстегі проекцияларының алгебралық қосындысына тең, яғни:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix},$$

$$R_x = -F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 = -2000 \cdot \cos 45^\circ + 2000 \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy},$$

$$\begin{aligned} R_y &= -F_1 \cos(90^\circ - \alpha_1) - F_2 \cos(90^\circ - \alpha_2) = \\ &= -2000 \cdot \sin 45^\circ - 2000 \cdot \sin 45^\circ = -2828,4 \text{ Н}. \end{aligned}$$

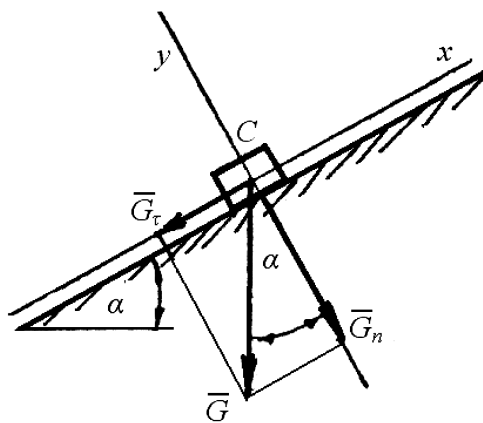
Олай болса,

$$R = \sqrt{0 + (-2828,4)^2} = 2828,4 \text{ Н}.$$

1.4-мысал. $m = 1000$ кг массалы жүк абсолютті тегіс көлбеу жазықтыққа қойылған, бұрышы $\alpha = 30^\circ$ (1.24-сурет). Жүктің көлбеу

жазықтыққа түсіретін қысымын және жүкті осы жазықтық бетінде қозғалысқа әкелетін күшті анықтаңыз.

Шешуі: Жүктің ауырлық күші $G = mg = 1000 \cdot 9,81 = 9810 \text{ Н}$ C ауырлық центріне түсіп тұр және көлбеу жазықтықта құраушыларға жіктеледі:



1.24-сурет

$$\vec{G} = \vec{G}_\tau + \vec{G}_n,$$

мұндағы \vec{G}_n – жазықтыққа перпендикуляр бағытталған қысым күші және \vec{G}_τ – көлбеу жазықтық бетімен жүкті төмен жылжитатын жазықтыққа параллель күш. C нүктесі арқылы координаттар өсін жүргіземіз (1.24-сурет).

\vec{G} векторының координат өстеріндегі проекциялары

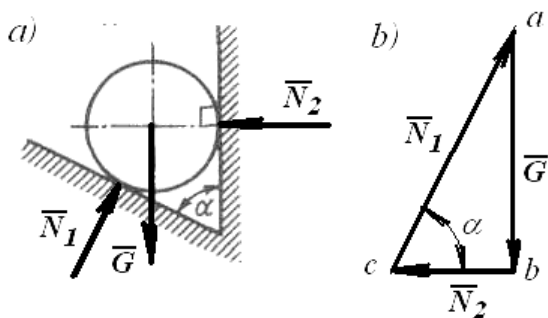
$$G_n = G_y = G \cdot \cos \alpha = 9810 \cdot \cos 30^\circ = 8496 \text{ Н},$$

$$G_\tau = G_x = G \cdot \sin \alpha = 9810 \cdot \sin 30^\circ = 4905 \text{ Н}.$$

Сонымен, жүкті қозғаушы күштің шамасы $G_\tau = 4905 \text{ Н}$.

В) Байланыстар және байланыс реакциялары

1.5-мысал. Салмағы 40 Н біртекті шар $\alpha = 60^\circ$ бұрышпен қиылысқан екі жазықтыққа тірелген (1.25, a -сурет). Шардың жазықтықтарға қысымын анықтаңыз.



1.25-сурет

Шешуі: Жылтыр жазықтықтың реакциясы оған түсірілген нормаль бойымен бағытталады. Қарастырылып отырған есепте жазықтықтардың \vec{N}_1, \vec{N}_2 реакцияларының әсер сызықтары шардың ауырлық центрінде түйіседі (1.25, a -сурет), яғни шар

жинақталатын \bar{N}_1, \bar{N}_2 және \bar{G} күштер жиыны әсерінде тепе-теңдікте тұр деп қарастыруымызға болады.

Осы күштер жиынының күштер үшбұрышын тұрғызсақ (1.25, *b*-сурет), abc тікбұрышты үшбұрыш аламыз.

Тұрғызылған үшбұрышқа синустар теоремасын қолданып,

$$\frac{N_1}{\sin 90^\circ} = \frac{N_2}{\sin 30^\circ} = \frac{G}{\sin 60^\circ},$$

қатынастарын аламыз.

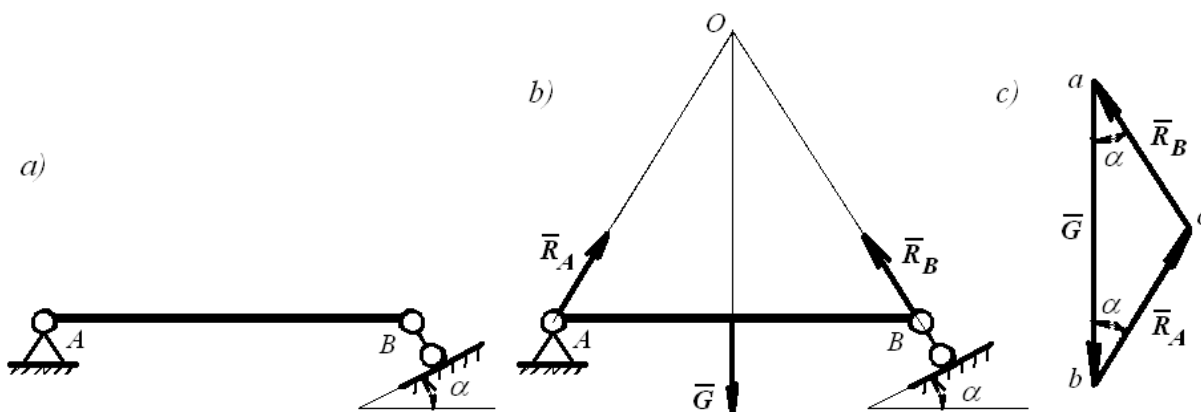
Мұнан

$$N_1 = \frac{G \cdot \sin 90^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{40 \cdot 1}{0,866} = 46,2H,$$

$$N_2 = \frac{G \cdot \sin 30^\circ}{2 \sin 60^\circ} = \frac{40 \cdot 0,5}{0,866} = 23,1H.$$

Сонымен, шардың жазықтықтарға қысымы – $46,2 H$ және $23,1 H$.

1.6-мысал. Салмағы $180 H$ арқалық екі топсалы тірекпен бекітілген. Топсалы жылжымалы тірек горизонтқа $\alpha = 30^\circ$ бұрыш жасай орналасқан (1.26, *a*-сурет). Топсалы тіректердің реакцияларын анықтаңыз.



1.26-сурет

Шешуі: Жылжымалы топса дененің тіреу жазықтығымен қозғалыс жасауына кедергі келтірмейді де, оған перпендикуляр бағыттағы қозғалысын шектейді. Сондықтан оның реакциясы әрдайым тіреу жазықтығына перпендикуляр бағытталатын болатындықтан, B

тірегінің реакциясын тіреу жазықтығына түсірілген нормаль бойымен жоғары бағыттаймыз (1.26, *b*-сурет). \bar{R}_B реакциясы мен арқалықтың ортасына түсірілген салмағының \bar{G} күш векторлары O нүктесінде қиылысады. AB арқалығы тепе-теңдікте болғандықтан, үш күш теоремасы негізінде, A тірегінің \bar{R}_A реакциясының әсер сызығы да осы нүктеден өтетінін аңғарамыз (1.26, *b*-сурет). Сонымен, AB арқалығы жинақталатын үш күш жиыны әсерінен тепе-теңдікте болады. Осы күштерден тұрғызылған үш күш үшбұрышынан тірек реакцияларын анықтаймыз (1.26, *c*-сурет).

$$\frac{R_A}{\sin 30^\circ} = \frac{R_B}{\sin 30^\circ} = \frac{G}{\sin 120^\circ}$$

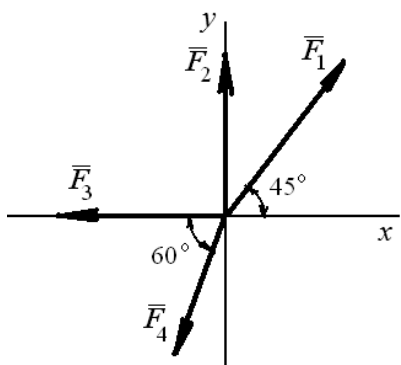
Мұнан

$$R_A = \frac{G \cdot \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{180 \cdot 0,5}{0,866} = 103,9H.$$

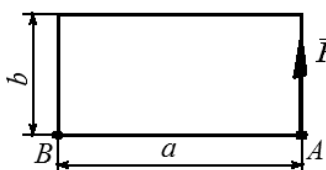
$$R_B = \frac{G \cdot \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{180 \cdot 0,5}{0,866} = 103,9H.$$

Жаттығу есептері

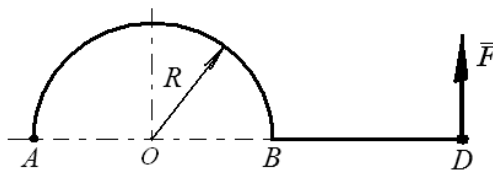
1-есеп: Келтірілген өрнектердің қайсысы суреттегі жазық күштер жүйесінің Ox өсіне проекцияларының қосындысын анықтаңыз (1-сурет).



1-сурет



2-сурет



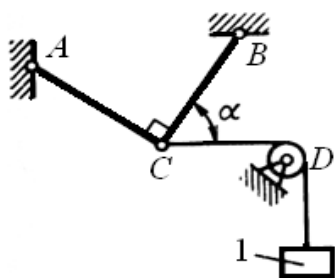
3-сурет

2-есеп. Қабырғалары $a = 2$ м, $b = 3$ м тікбұрышты пластинаның A нүктесіне $F = 2$ Н күші әсер етеді. Осы күштің B нүктесіне қатысты моментінің алгебралық шамасын табыңыз (2-сурет).

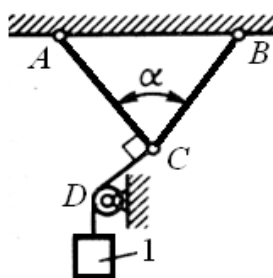
3-есеп. Денеге $F = 2H$ күші әсер етеді (3-сурет). Егер шеңбердің радиусы $R = 2m$, ал $BD = 1,5m$ болса, осы күштің A нүктесіне қатысты моментінің алгебралық шамасы неге тең?

4-есеп. C нүктесінде топсалы екі AC және BC стерженьдері бекітіліп, түйінге шығыршық D арқылы салмағы $12 H$ жүк ілінген (4-сурет).

Стерженьдердің байланыс реакциясын анықтаңыз. $\alpha = 60^\circ$.



4-сурет



5-сурет

5-есеп. Салмағы $6 H$ жүкті 1 екі AC және BC стерженьдері C нүктесінде топсалы бекітіліп (5-сурет), тепе-теңдікте ұстатылған. $\alpha = 60^\circ$. Стерженьдердің байланыс реакциясын анықтаңыз.

Қайталау сұрақтары:

1. Механика нені зерттейді?
2. Материалық нүкте деген не?
3. Абсолюттік қатты денелер деген не?
4. Статика бөлімі нені зерттейді?
5. Күш деген не? Күштің өлшем бірлігі, күш жиыны деген не?
6. Күш вектор ретінде қалай сипатталады?
7. Эквивалентті күштер жиыны деген не?
8. Күштер жиынының тең әсерлі күші деген не?
9. Тең әсерлі күштің түсу нүктесі, шамасы, бағыты қалай анықталады?
10. Тең әсерлі күштің теңгеруші күштен қандай айырмашылығы бар?
11. Күштің координаттар өсіне және жазықтыққа проекциялары қалай анықталады?
12. Жазықтықтағы күштің нүктеге қатысты моменті дегеніміз не? Күш моментінің таңбасы қандай ереже бойынша анықталады?
13. Күштің берілген нүктеге қатысты вектор-моментінің бағыты мен модулі қалай анықталады?

14. Қандай жағдайда күштің нүктеге қатысты вектор-моменті нөлге тең?
15. Күштің өске қатысты моменті деген не және оның таңбасы қалай алынады?
16. Қандай жағдайда күштің өске қатысты моменті нөлге тең?
17. Күштің нүктеге қатысты вектор-моменті және осы күштің нүкте арқылы өтетін өске қатысты моменті арасында қандай тәуелділік бар?
18. Күштің координаттар өстеріне қатысты моменттерінің аналитикалық формулалары қалай жазылады?
19. Күштерді қосу және жіктеу деген не?
20. Статиканың әсері және қарсы әсері туралы аксиомасы нені білдіреді?
21. Күштерді векторлық әдіспен қосуға болатынын статиканың қандай аксиомасы көрсетеді?
22. Статиканың тепе-теңдік аксиомасы не үшін енгізілген?
23. Қатты денеге әсер етуші күшті, күш түзуі бойымен сырғытқаннан күштің денеге әсерін өзгермейтінін қандай аксиома көрсетеді?
24. Екі күш қандай жағдайда тепе-теңдікте болады?
25. Параллелограмм ережесін түсіндіріп, тең әсерлі күшті анықтайтын формулаларды жазыңыз.
26. Бір күшті оны құраушы екі күшке неше тәсілмен жіктеуге болады?
27. Үш күш тепе-теңдікте болса, олардың әсер сызығы туралы қандай тұжырымдама айта аламыз?
28. Актив күштері мен пассив күштердің айырмашылығы неде?
29. Қатты дене қандай жағдайларда тепе-теңдікте болады?
30. Байланыстар туралы аксиоманың «көмегін» қалай түсінесіз?
31. Иілгіш байланыспен стержень реакцияларының айырмашылығы неде?
32. Тепе-теңдікте тұрған денеге қосымша байланыстарды қосқаннан дене тепе-теңдігінің өзгермейтінін қандай аксиома көрсетеді?
33. Еркін дененің еріксіз денеден айырмашылығы неде?
34. Байланыс реакциясы деген не? Байланыс реакциясы қалай бағытталады? Байланыс реакциясы неге пассивті күштер деп аталады?
35. Қандай жағдайда еріксіз денелерді еркін дене деп санауға болады?

36. Байланыстардың қандай негізгі түрлері бар?
37. Идеал жылтыр беттер реакциясы қайда бағытталған?
38. Жылжымалы топсалы тірек реакциясы қайда бағытталған?
39. Жылжымайтын топсалы тірек реакциясы туралы не айтуға болады?
40. Жылжымайтын өкшелік тірек реакциясын қалай көрсетуге болады?
41. Жылжымайтын сфералық топсалы тірек реакциясын қалай көрсетуге болады?
42. Иілгіш байланыстар реакциясы қайда бағытталған?
43. Стерженьді байланыстар реакциясы туралы не айтуға болады?
44. Қатаң тірек реакциясы туралы не көрсетуге болады?
45. Еркін емес дене туралы қандай түсінігіңіз бар?

2-тарау. ЖАЗЫҚ ЖИНАҚТАЛАТЫН КҮШТЕР ЖҮЙЕСІ

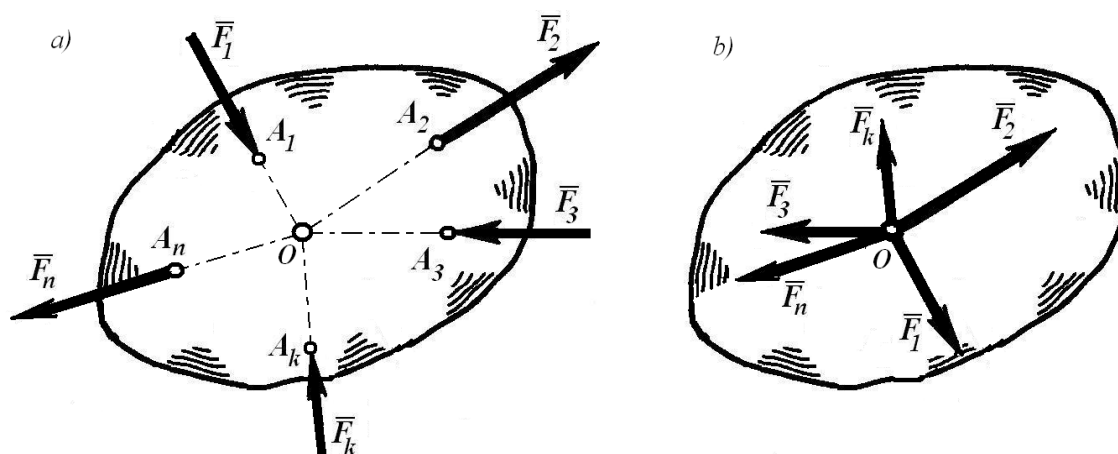
2.1. Жазық жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күшін анықтаудың геометриялық тәсілі

Әсер сызықтары бір нүктеде қиылысатын күштер жүйесі *жинақталатын күштер жүйесі* деп аталады. Берілген барлық күштердің әсер сызықтары бір жазықтықта жатса, онда күштер жүйесін *жазық жинақталатын күштер жүйесі* деп, ал ол күштердің әсер сызықтары әртүрлі жазықтықта жатса, *кеңістіктегі жинақталатын күштер жүйесі* деп атайды.

Күшті оның әсер сызығы бойымен сырғытуға болады, сондықтан әсер сызықтары қиылысатын нүктеге жинақталатын күштерді әрдайым көшіруге болады.

Теорема. *Жазық жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күші сол күштердің векторлық қосындысына тең, оның әсер сызығы күштер жинақталатын нүктеден өтеді.*

Қатты дененің $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots, A_n$ нүктелеріне $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_k, \dots, \vec{F}_n$, әсер сызықтары O нүктесінде қиылысатын, күштер түсірілген делік (2.1, *a*-сурет). Осы күштерді әсер сызықтары бойымен сырғытып, олардың ортақ нүктесі O нүктесіне келтірейік. Сонда жинақталатын күштер жүйесі бір нүктеге түсірілген күштер жүйесін құрайды (2.1, *b*-сурет).



2.1-сурет

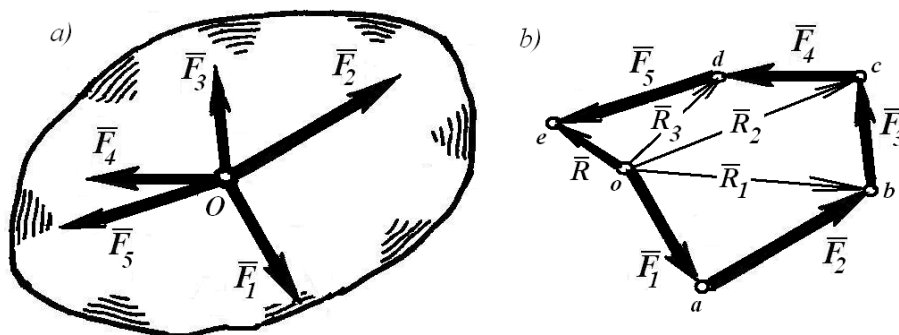
Жинақталған күштерді қосуға болады, ол үшін 2.2, *a*-суретте көрсетілген, жүктелген денені қарастырайық.

Параллелограмм ережесіне сүйеніп, алғашқы екі \vec{F}_1 мен \vec{F}_2 күштерін қосып, олардың тең әсерлі күшін аламыз (2.2, *b*-сурет):

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Одан кейін \vec{R}_1 және \vec{F}_3 күштерінен параллелограмм құру арқылы \vec{R}_2 күшін табамыз:

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$



2.2-сурет

Келесіде \vec{R}_2 және \vec{F}_4 күштерінен параллелограмм құрамыз да, \vec{R}_3 күшін табамыз:

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_2 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

Енді \vec{R}_3 пен \vec{F}_5 күштерін қосып, \vec{R} күшін табамыз:

$$\vec{R} = \vec{R}_3 + \vec{F}_5 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5.$$

мұндағы \vec{R} – берілген бес күш жүйесінің тең әсерлі күші (2.2, *b*-сурет).

Осы ретпен кез келген жинақталатын күштерді қосып, нәтижесінде олардың тең әсерлі күшін анықтауға болады:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

немесе ықшамдап жазсақ:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i. \quad (2.1)$$

Жинақталған күштердің тең әсерлі күшін анықтаудың қарастырылған әдісін *геометриялық әдіс* деп атайды.

Енді берілген күштердің тең әсерлі күшін үшбұрыш ережесін пайдалана отырып анықтауды қарастырайық (2.2, *b*-сурет). Алдымен \bar{F}_1 және \bar{F}_2 күштерін қосайық. Ол үшін кез келген O нүктесінен бағыты мен масштабын сақтай отырып, \bar{F}_1 күшін тұрғызайық, оның ұшынан \bar{F}_2 күшін салайық. O нүктесін \bar{F}_2 күшінің ұшымен қосып, осы күштердің тең әсерлі күшін анықтайық, яғни

$$\bar{R}_1 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

Сонан соң \bar{R}_1 күшінің ұшынан үшінші \bar{F}_3 күшін салайық. Тағы да O нүктесін соңғы \bar{F}_3 күшінің ұшымен қосып, осы күштердің тең әсерлі күшін табамыз:

$$\bar{R}_2 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3.$$

\bar{R}_2 күшінің ұшынан \bar{F}_4 күшін жүргізейік. O нүктесін \bar{F}_4 күшінің ұшымен қосып, \bar{R}_2 және \bar{F}_4 күштерінің қосындысын аламыз:

$$\bar{R}_3 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4.$$

Осы \bar{R}_3 күштің ұшына соңғы \bar{F}_5 күшін тұрғызып, соңғы күштің ұшын O нүктесімен қосып, \bar{R} күшін немесе берілген жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күшін аламыз:

$$\bar{R} = \bar{R}_3 + \bar{F}_5 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \bar{F}_5.$$

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \bar{F}_5 = \sum_1^5 \bar{F}_i.$$

Іс жүзінде аралықтағы \bar{R}_1 , \bar{R}_2 және \bar{R}_3 векторларын тұрғызбай-ақ, жоғарыда көрсетілген ретпен күштерді бағыты мен шамаларын

сақтай отырып, бір-біріне тіркестіре салып және алғашқы күштің бас нүктесін соңғы күштің ұшымен қосып, тең әсерлі күшті анықтауға болады.

Тұрғызылған көпбұрышты (2.2, *b*-сурет) **күштер көпбұрышы** деп атайды. Осы көпбұрыштың тұйықтаушы қабырғасы берілген күштер жүйесінің \bar{R} тең әсерлі күшін кескіндейді. Тең әсерлі күш бағыты әрдайым тиісінше біртіндеп берілген күштерді қосумен тұрғызылған көпбұрыштың орғыту бағытына қарама-қарсы болады.

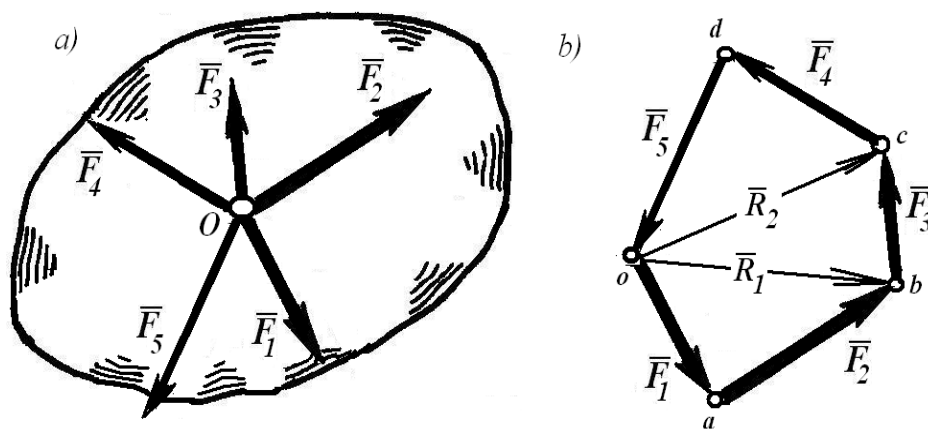
Жинақталатын күштер жүйесінің тепе-теңдік шарты. Кейде күштер көпбұрышын тұрғызғанда, соңғы қосылатын күштің ұшы алғашқы күштің бас нүктесіне сәйкес келуі мүмкін (2.3-сурет), яғни жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күші нөлге тең болады.

Бұл жағдайда жинақталатын **күштер жүйесі тепе-теңдікте** деп аталады.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \bar{F}_5 = \sum_{i=1}^5 \bar{F}_i. \quad (2.2)$$

немесе

$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_5\} \approx 0.$$



2.3-сурет

Сонымен, **жинақталатын күштер жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін, күштер көпбұрышының тұйықталған болуы қажет және жеткілікті.** Бұл тұжырым жинақталатын күштер тепе-теңдікте болуының **геометриялық шарты** деп аталады.

2.2. Жазық жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күшін анықтаудың аналитикалық тәсілі

Бір нүктеге түсірілген екі күштің тең әсерлі күшінің модулі мен бағытын аналитикалық тәсілмен де анықтауға болады, ол үшін ABC үшбұрышын қарастырайық (2.4-сурет). $\angle BAD = \varphi$, $\angle ABC = \pi - \varphi$.

Косинустар теоремасы бойынша:

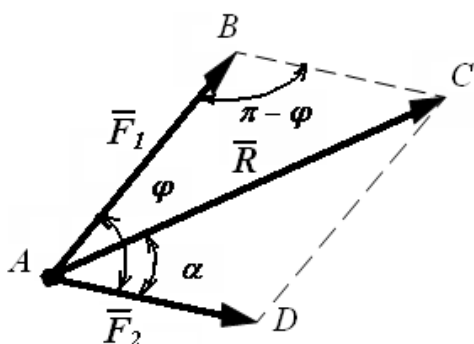
$$R_1^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \varphi) = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi,$$

бұдан тең әсерлі күші модулі,

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi}. \quad (2.3)$$

Синустар теоремасы бойынша:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{R}{\sin \varphi}. \quad (2.4)$$



2.4-сурет

Осы тепе-теңдіктен тең әсерлі күштің әсер ету бағытын анықтаймыз:

$$\sin \alpha = \frac{F_1 \sin \varphi}{R}. \quad (2.5)$$

Екі күшті қосудың дербес жағдайларын қарастырайық:

1) Егер $\varphi = 0$ болса, онда $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ ($R = F_1 + F_2$).

Қатты дененің бір нүктесіне бір түзудің бойымен бір бағытта түсірілген екі күштің тең әсерлі күшінің шамасы күштер шамаларының қосындысына тең және сол түзудің бойында күштер бағытымен бағытталады.

2) Егер $\varphi = 180^\circ$ болса, $\bar{R} = \bar{F}_1 - \bar{F}_2$ ($R = F_1 - F_2$).

Қатты дененің бір нүктесіне бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытта түсірілген екі күштің тең әсерлі күшінің шамасы күштер шамаларының айырымына тең және сол түзудің бойында үлкен күш бағытымен бағыттас болады.

3) Егер $\varphi = 90^\circ$ болса, онда $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

Қатты дененің бір нүктесіне өзара перпендикуляр түсірілген екі күштің тең әсерлі күшінің шамасы мен бағыты осы күштерден тұрғызылған тік төртбұрыштың диагоналына тең.

Енді жазық жинақталатын n күштер жүйесі берілсін делік.

$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n\}.$$

Бұл жүйенің тең әсерлі күші

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^n \overline{F}_i.$$

Берілген күштердің әсер жазықтығынан xOy тікбұрышты координаттар жүйесінің өстерін таңдап алып, берілген күштер жүйесі мен олардың тең әсерлі күшін осы өстерге проекциялайық.

Қосынды вектордың кез келген өс бағытына түсірілген проекциясы қосылғыш векторлардың сол өстегі проекцияларының қосындысына тең болатыны бізге математикадан белгілі, яғни

$$F_x = \sum_1^n F_{ix}.$$

Олай болса,

$$R_x = \sum_1^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_1^n F_{iy}, \quad (2.6)$$

мұндағы: F_{ix}, F_{iy} – берілген күштердің x пен y өстеріндегі проекциялары; R_x, R_y – тең әсерлі күштің осы өстердегі проекциялары.

Сонымен, \overline{R} тең әсерлі күштің әрбір координат өстеріндегі проекциялары сол өстердегі берілген күштердің проекцияларының қосындысына тең болатынын тұжырымдадық. Егер R_x пен R_y анықталған болса, жазық жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күші \overline{R} -дің модулі мен бағыттауыш косинустарын алдыңғы тақырыпта алынған (2.2) және (2.3) өрнектерін қолдана отырып тауып алуға болады.

Тең әсерлі күштің модулі

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad (2.7)$$

тең әсерлі күштің бағыттаушы косинустары

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}. \quad (2.8)$$

Тепе-теңдік шартының аналитикалық түрі. Егер берілген жазық жинақталатын күштер жүйесі тепе-теңдікте болса, онда жүйенің тең әсерлі күші нөлге тең, яғни $\bar{R} = 0$.

Ал тең әсерлі күш нөлге тең болса, демек, оның проекциялары да нөлге тең болады:

$$R_x = 0; \quad R_y = 0,$$

немесе (2.6) өрнек бойынша,

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (2.9)$$

Осы өрнек *жазық жинақталатын күштер жүйесінің тепе-теңдігінің аналитикалық шарты* деп аталады. Бұл шарт былайша тұжырымдалады: *жазық жинақталатын күштер жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін, осы күштердің екі координат өстерінің әрқайсысындағы проекцияларының алгебралық қосындылары нөлге тең болуы қажет және жеткілікті.*

Тепе-теңдік теңдеуі берілген күштер жүйесінің екі белгісіз элементін анықтауға мүмкіндік береді, мысалы, бір күштің модулі мен бағытын немесе бағыттары белгілі екі күштің модулін табу.

2.3. Есептерді шешудің әдістемесі

Берілген тақырыпта есептер шығару үшін есеп шығару әдістері белгілі бір жоспар бойынша жүргізілуі керек:

– жинақталған күштер жиынының әсер етуіне байланысты, тепе-теңдігі қарастырылатын нүктені белгілеу;

– тепе-теңдігі қарастырылуға тиіс денеге (нүктеге) түсірілген барлық актив күштерді векторлармен көрсету;

– егер қарастырылып отырған дене, денелер жиыны немесе нүктелер түйіні бос болмаса, онда байланыстардан босату принципін пайдалана отырып, актив күштер мен байланыс реакциялары әсер етіп тұрған денені анықтау;

– берілген есептің шарты бойынша оның статикаша анықталатынын тексеру;

– координаттық өстер жүйесін енгізу;

– жинақталған күштер жиынының қажетті және жеткілікті шарты

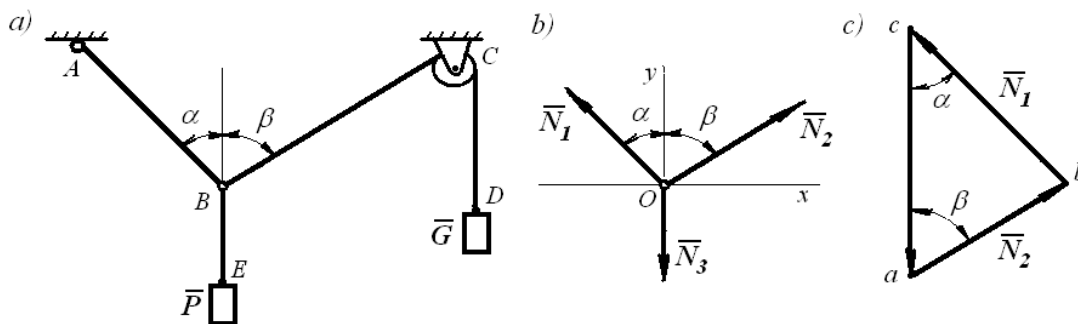
болатын $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$, $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ теңдеулерін жазу;

– табылған шешімдерді тексеріп және талдау жүргізу.

Әрине, бұл айтылған есеп шығару жоспары ғана болып, берілген есептің мазмұнына сәйкес, жоғарыда жазылған жоспардың барлығы түгел орындалмай-ақ, оның шешімдерін табуға болады.

Енді осы жоспарға сәйкес бірнеше есеп қарастырайық.

2.1-мысал. Бір ұшы A нүктесінде бекітілген AB жібінің екінші ұшына салмағы P -ға тең жүгі байланып, оның BCD жалғасы блок арқылы асыра тасталып, D ұшына салмағы $Q = 100 \text{ Н}$ жүк ілінген (2.5, a -сурет). Шығыршықтағы үйкелісті ескермей, AB жібінің керілу күшін \bar{N}_1 және \bar{P} жүгінің салмағын анықтаңыз. Тепе-теңдік жағдайда жіп бөліктерінің BE вертикалымен арасындағы бұрыштар: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$.



2.5-сурет

Шешуі: Суреттегі жүктердің және жіп бөліктерінің B түйінінде тепе-теңдік жағдай болғанда ғана теңгеріліп тұратынына сәйкес, жіптің AB , BC , BE бөліктері B түйінінің қозғалысын шектеп, байла-

ныстар реакциялары болып табылады. Енді байланыстарды босату принциптеріне сүйене отырып, оларды \bar{N}_1, \bar{N}_2 және \bar{N}_3 реакция күштеріне ауыстырсақ, B түйіні жинақталған \bar{N}_1, \bar{N}_2 және \bar{N}_3 күштер жиынының әсерінен тепе-теңдікте болатын еркін нүкте ретінде қарастыруға болады (2.5, b -сурет). Ал, \bar{N}_1, \bar{N}_2 және \bar{N}_3 күштері жіп бөліктерінің созылуларына сәйкес B түйінінен бастап бағытталады. Атап өтетін жайт: BE жібінің реакциясы $N_3 = P$, ал BC жібінің реакциясы есептің шартына сәйкес Q жүгінің шамасына тең, яғни $N_2 = Q$.

Осы есептің шығарылуының үш тәсілін қарастырайық.

1. *Графикалық тәсілмен шешу.* \bar{N}_1, \bar{N}_2 және \bar{N}_3 күштері тепе-теңдікте болғандықтан, осы күштерден құралған күштер үшбұрышы тұйықталуы қажет. Осы күштер үшбұрышын салайық. Алдымен, $1 \text{ см} = 50 \text{ Н}$ яғни $\mu = 1:50$ масштабымен шамасы мен бағыты белгілі \bar{N}_2 күшін салып (2.5, c -сурет), оның векторының басы мен ұшынан \bar{N}_1 және \bar{N}_3 күштерінің бағыттарына параллель түзулер жүргіземіз. Осының нәтижесінде пайда болған abc тұйықталған күштер үшбұрышының ac және bc қабырғалары ізделіп отырған \bar{N}_1 және \bar{N}_3 реакцияларының шамасы мен модулін анықтайды. Осы күштердің шамасын, яғни AB жібінің керілу күшін және P жүгінің салмағын анықтау үшін, алынған масштабта ac және bc қабырғаларының ұзындықтарын өлшеп аламыз.

$$ac = 2,75 \text{ см}, bc = 2,45 \text{ см}.$$

Олай болса,

$$P = ac \cdot \mu = 2,75 \cdot 50 = 137,5 \text{ Н};$$

$$N_1 = bc \cdot \mu = 2,45 \cdot 50 = 122,5 \text{ Н}.$$

2. *Геометриялық тәсілмен шешу.* abc күштер үшбұрышының ac және bc қабырғаларын геометрия және тригонометрия формулаларын қолданып анықтау тәсілін көрсетейік. abc күштер үшбұрышындағы $\angle bac = \beta = 60^\circ$, $\angle acb = \alpha = 45^\circ$ және $\angle abc = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 75^\circ$ екенін көреміз (2.5, b, c -сурет).

Синустар теоремасын пайдалана отырып, келесі өрнектерді тұрғызайық:

$$\frac{N_1}{\sin \beta} = \frac{N_2}{\sin \alpha} = \frac{N_3}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))},$$

немесе

$$\frac{N_1}{\sin 60^\circ} = \frac{Q}{\sin 45^\circ} = \frac{P}{\sin 75^\circ}.$$

Бұдан

$$N_1 = \frac{Q \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{100 \cdot 0,866}{0,707} = 122 \text{ H};$$

$$P = \frac{Q \cdot \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{100 \cdot 0,966}{0,707} = 137 \text{ H}.$$

3. Аналитикалық тәсілмен шешу. Тепе-теңдік теңдеулерін құру үшін, алдымен координаттар өстерін белгілеп алу қажет (2.5, b-сурет). Координаттар өстері жүйесін алған кезде, әсер етуші күштердің осы өстерге проекциясын анықтау ыңғайлы болатынын ескерген жөн. Суретте көрсетілгендей, координат өстері жүйесін енгізіп, жинақталған жазық күштер жүйесінің тепе-теңдік теңдеулерін жаза аламыз:

$$\sum F_{ix} = -N_1 \cdot \sin \alpha + N_2 \cdot \sin \beta = 0,$$

$$\sum F_{iy} = N_1 \cos \alpha + N_2 \cdot \cos \beta - N_3 = 0.$$

Жүйені шешіп, ізделіп отырған белгісіздерді есептеп шығарамыз:

$$N_1 = \frac{N_2 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}; \quad N_3 = N_1 \cdot \cos \alpha + N_2 \cos \beta,$$

немесе

$$N_1 = \frac{Q \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{100 \cdot 0,866}{0,707} = 122 \text{ H};$$

$$P = N_1 \cdot \cos \alpha + Q \cos \beta = 122 \cdot 0,707 + 100 \cdot 0,5 = 137 \text{ H}.$$

2.2-мысал. Вертикальмен α бұрышын жасайтын көлбеу жазықтыққа салмағы P шар A нүктесінде тірелген және қабырғаға вертикальмен β бұрышын құрайтын жіппен байланған (2.6, a-сурет).

Жазықтықтың A нүктесіндегі реакциясы мен жіптің керілуін анықтаңыз.

Шешуі: 1. *Геометриялық тәсілмен шешу.* Ол үшін тұйықталған күш көпбұрышын тұрғызамыз. Кез келген a нүктесінен \bar{P} күшіне параллель \overline{ab} векторын жүргіземіз. Оның ұзындығы белгілі масштабпен алынған \bar{P} күшінің модуліне тең. a және b нүктелерінен OB және An түзулеріне параллель түзулер жүргіземіз. Бұл түзулер c нүктесінде қиылысады. \overline{ca} және \overline{bc} векторлары ізделіп отырған \bar{T} және \bar{N} күштерін (2.6, b -сурет) береді. Осы күштердің күш үшбұрышындағы бағыттарын анықтау үшін, \bar{P} күшінің бағытына сүйене отырып, үшбұрышты периметрі бойымен айналып шығу қажет. \bar{P} күші тұрғызылған масштабты біле отырып және ac мен bc кесінділерінің ұзындықтарын өлшеп, \bar{T} және \bar{N} күштерінің шамасын анықтаймыз.

2. *Аналитикалық тәсілмен шешу.* Жазықтыққа түсірілген An нормалі бағытындағы ізденді жазық реакциясын \bar{N} деп, ал шамасы жіптің керілуіне тең жіптің реакциясын \bar{T} деп белгілейік. Үш \bar{P} , \bar{T} және \bar{N} күшінің әсер сызықтары шардың центрінде қиылысады. O центрінен өтетін x және y координаттар өстерін (2.6, a -сурет) таңдап аламыз. $\angle BOy = \beta$ және $\angle nOx = \alpha$ екенін атап өтіп, \bar{P} , \bar{T} және \bar{N} күштерінің әсеріндегі шардың тепе-теңдік шартын тұрғызамыз.

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \beta = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N \cdot \sin \alpha + T \cdot \cos \beta - P = 0.$$

Бірінші теңдеуді $\cos \beta$ -ға, ал екіншісін $\sin \beta$ көбейтіп және оларды қосып, төмендегідей өрнекті аламыз

$$N(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) = P \sin \beta,$$

мұнан:

$$N = \frac{P \cdot \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)};$$

енді бірінші теңдеуден:

$$T = \frac{N \cdot \cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}$$

анықтаймыз.

Егер $\beta = \alpha$ деп алсақ, тепе-теңдік теңдеулерінен:

$$N = P \cdot \sin \alpha \text{ және } T = P \cdot \cos \alpha$$

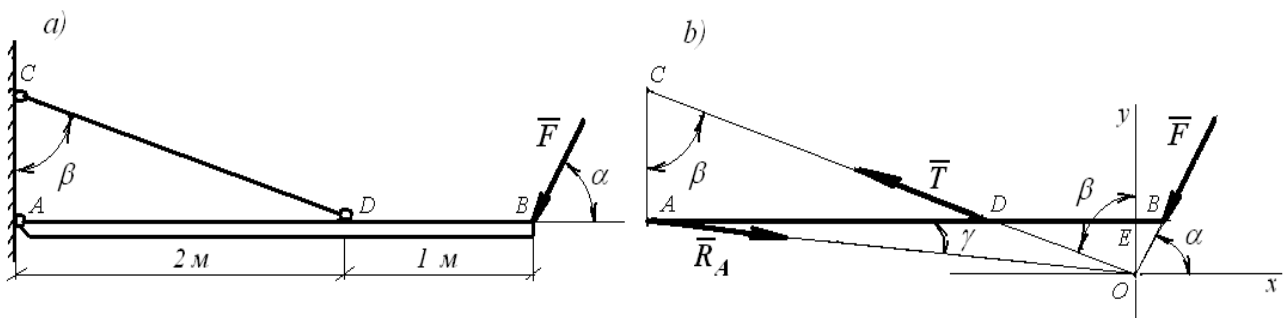
шешімдерін аламыз. Бұл жағдай шарды ұстап тұрған жіптің көлбеу жазықтыққа параллель болғандағы жағдайының шешімі болып табылады.

Егер $\alpha = 0$ болса, онда

$$N = P \cdot \operatorname{tg} \beta \text{ және } T = \frac{P}{\cos \beta}.$$

Бұл жағдай шардың вертикаль жазықтыққа тірелген жағдайының шешіміне сәйкес келеді.

2.3-мысал. Бірұшы қозғалмайтын топсалы тірекпен қабырғаға бекітілген AB арқалығы горизонталь күйінде көлбеу, вертикальмен $\beta = 75^\circ$ бұрыш жасай орнатылған CD шынжыр тартпаға асылып тұр (2.7, а-сурет). Арқалықтың бос ұшына $\alpha = 60^\circ$ бұрышпен $F = 300 \text{ H}$ жүк түсірілген. Арқалықтың салмағын ескермей, қозғалмайтын топсалы A тірегінің және CD тартпасы бойындағы реакция күштерін табыңыз.



2.7-сурет

Шешуі: AB арқалығының тепе-теңдігін қарастырамыз. Арқалыққа әсер ететін актив күш \vec{F} . Арқалыққа түсірілген байланыстар қозғалмайтын A топсасы және CD созылмайтын шынжыр.

Арқалықты байланыстардан босатып, еркін дене ретінде қарастырамыз. CD шынжырының реакциясы осы шынжырдың

бойымен бағытталады (2.7, *b*-сурет). Ал қозғалмайтын A топса реакциясының бағыты белгісіз. Үш күштер теоремасы бойынша AB арқалығы бір-біріне параллель емес бір жазықтықта жататын үш күштің әсерінен тепе-теңдікте болатындықтан, олардың әсер сызықтары бір нүктеде қиылысуға тиіс. \bar{F} және \bar{T} күштерінің әсер сызықтарының O қиылысу нүктесін A нүктесімен қосамыз. A және O нүктелерін қосатын OA түзуі A топсаның \bar{R}_A реакциясының бағыты болып табылады. \bar{F} күшінің шамасы мен бағыты және басқа \bar{T} , \bar{R}_A күштерінің бағыттары белгілі болғандықтан, күштер үшбұрышын құрып, белгісіз \bar{T} , \bar{R}_A күштерінің модулін анықтауға болады.

Есепті аналитикалық тәсілмен шығарайық. Ол үшін алдымен, геометриядан \bar{R}_A реакциясының бағытын анықтайтын γ бұрышын табайық.

$$\triangle AOE \text{ -ден} \quad \frac{OE}{AE} = \operatorname{tg} \gamma.$$

$$\triangle DOE \text{ -ден} \quad \frac{OE}{DE} = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta).$$

$$\triangle BOE \text{ -ден} \quad \frac{OE}{BE} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Олай болса,

$$BE = \frac{OE}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad DE = \frac{OE}{\operatorname{tg}(90^\circ - \beta)}.$$

Бұл кесінділердің ұзындықтарының қосындысы – 1 м, яғни

$$BD = BE + DE = \frac{OE}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{OE}{\operatorname{tg}(90^\circ - \beta)} = 1 \text{ м}.$$

Бұл теңдіктен OE кесіндісінің шамасын өрнектейміз:

$$OE = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(90^\circ - \beta)}.$$

Енді DE және AE кесінділерінің шамаларын анықтайық.

$$DE = \frac{tg\alpha}{tg\alpha + tg(90^\circ - \beta)}, \quad AE = AD + DE = 2 + \frac{tg\alpha}{tg\alpha + tg(90^\circ - \beta)}.$$

Бұл OE , DE және AE өрнектеріне бұрыштардың мәндерін қойсақ,

$$OE = \frac{tg\alpha \cdot tg(90^\circ - \beta)}{tg\alpha + tg(90^\circ - \beta)} = \frac{1,732 \cdot 0,268}{1,732 + 0,268} = 0,232 \text{ м};$$

$$DE = \frac{tg\alpha}{tg\alpha + tg(90^\circ - \beta)} = \frac{1,732}{1,732 + 0,268} = 0,866 \text{ м};$$

$$AE = 2 + \frac{tg\alpha}{tg\alpha + tg(90^\circ - \beta)} = 2 + 0,866 = 2,866 \text{ м}.$$

Жоғарыда келтірілгендей:

$$tg\gamma = \frac{OE}{AE} = \frac{0,232}{2,866} = 0,081.$$

Олай болса,

$$\gamma = arctg(0,081) = 4^\circ 36'.$$

\bar{F} , \bar{T} және \bar{R}_A күштерінің әсер сызықтарының қиылысу O нүктесін бас нүкте ретінде алып, x , y өстерін жүргіземіз. AB арқалығына жинақталатын жазық күштер жиыны әсер етеді. Осы күштер жиынының тепе-теңдік теңдеулері:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_A \cdot \cos \gamma - T \cdot \sin \beta - F \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_A \cdot \sin \gamma + T \cdot \cos \beta - F \cdot \sin \alpha = 0.$$

Бұл теңдеулердің шешімі:

$$T = \frac{F \cdot \sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \gamma)}; \quad R_A = \frac{F \cdot \cos(\beta - \alpha)}{\cos(\beta + \gamma)}.$$

Өрнектерге сан мәндерін қойып, есептеулер жүргізіп, ізделіп отырған \bar{T} және \bar{R}_A реакцияларының шамаларын анықтаймыз

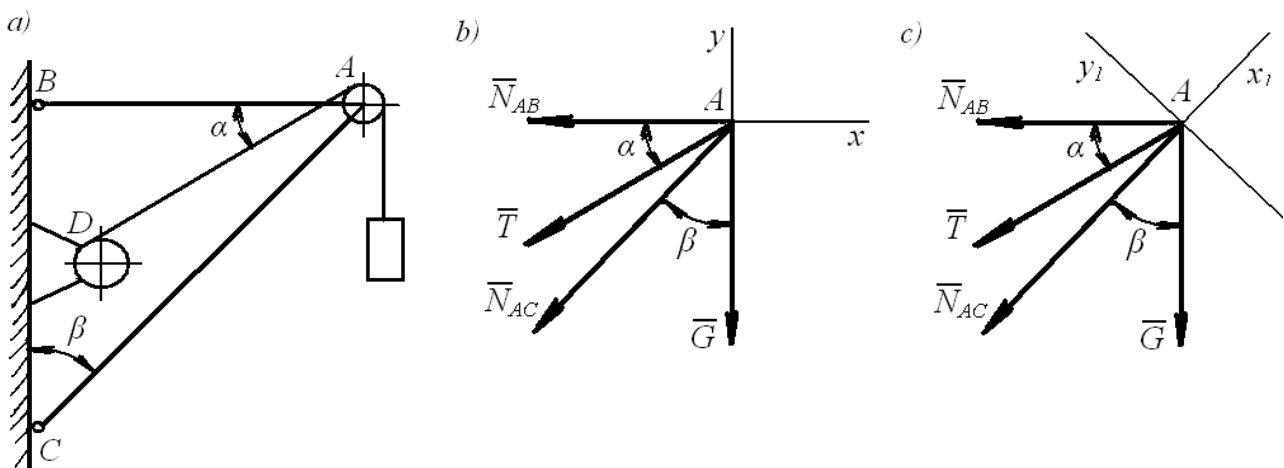
$$T = \frac{F \cdot \sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{300 \cdot \sin 135^\circ}{\sin 69^\circ 24'} = 226,6H ;$$

$$R_A = \frac{F \cdot \cos(\beta - \alpha)}{\cos(\beta + \gamma)} = \frac{300 \cdot \cos 15^\circ}{\cos 79^\circ 36'} = 1605,2H .$$

Сонымен,

$$T = 226,6H ; \quad R_A = 1605,2H .$$

2.4-мысал. 2.8, *a*-суретте кранның сызба нұсқасы көрсетілген. Массасы $m = 1000$ кг жүк *A* шығыршығы арқылы *D* шығырына баратын арқанда ілулі тұр. Егер $\angle \alpha = 30^\circ$, $\angle \beta = 45^\circ$ болса, *AB* мен *AC* стерженьдерінде пайда болатын күштердің шамасы неге тең?



2.8-сурет

Шешуі: Тепе-теңдікте тұрған *A* түйіндісін *A* нүктесі түрінде қарастырып, оған жүктің салмағын $G = mg = 1000 \cdot 9,81 = 9810H$, арқанның созылу күшін $T = G$ және *AB* мен *AC* стерженьдерінің реакциялары \bar{N}_{AB} мен \bar{N}_{AC} түсіреміз. Стерженьдердің екеуі де созылған күйде деп аламыз да, *A* нүктесінен *B* мен *C* нүктелеріне бағыттаймыз. Есепті аналитикалық тәсілмен шығарамыз, ол үшін *A* нүктесі арқылы *xAy* координаттар өстерін жүргіземіз (2.8, *b*-сурет).

Тұрғызылған жинақталған күштер жүйесінің тепе-теңдік теңдеулерін құрастырамыз:

$$\sum X_i = -N_{AB} - T \cos \alpha - N_{AC} \cos(90^\circ - \beta) = 0,$$

$$\sum Y_i = -T \cos(90^\circ - \alpha) - N_{AC} \cos \beta - G = 0.$$

\bar{N}_{AB} мен \bar{N}_{AC} реакцияларын, демек, AB мен AC стерженьдерінде пайда болатын күштерді анықтаймыз. Екінші теңдіктен:

$$N_{AC} = \frac{T \cos(90^\circ - \alpha) + G}{\cos \beta} = -G \frac{\cos(90^\circ - \alpha) + 1}{\cos \beta} = -9810 \frac{\cos 60^\circ + 1}{\cos 45^\circ} = -20810 \text{ H}.$$

«Минус» белгісі AC стерженьнің сығылатындығын көрсетеді.

$$\begin{aligned} N_{AB} &= -T \cos \alpha - N_{AC} \cos(90^\circ - \beta) = -G \cos 30^\circ - N_{AC} \cos 45^\circ = \\ &= -9810 \cos 30^\circ - (-20810) \cos 45^\circ = 6219 \text{ H}. \end{aligned}$$

деп көрсетеді. AB стержені созылған.

Есептің шешуінің дұрыс-бұрыстығын тексеру мақсатында басқа $x_1 A y_1$ координаттар жүйесін тандап алып, қайтадан тепе-теңдік теңдеуін құрастырамыз (2.8, с-сурет).

Тепе-теңдік теңдеулері:

$$\sum F_{i,x_1} = -N_{AC} - N_{AB} \cdot \cos(90^\circ - \beta) - T \cdot \cos(90^\circ - \beta - \alpha) - G \cdot \cos \beta = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum F_{i,y_1} &= N_{AB} \cdot \cos(90^\circ - (90^\circ - \beta)) + \\ &+ T \cdot \cos(90^\circ - (90^\circ - \beta - \alpha)) - G \cdot \cos(90^\circ - \beta) = 0, \end{aligned}$$

Төменгі теңдеуден:

$$N_{AB} = \frac{-T \cdot \cos(\beta + \alpha) + G \cos(90^\circ - \beta)}{\cos \beta} = 6219 \text{ H},$$

ал алғашқысынан

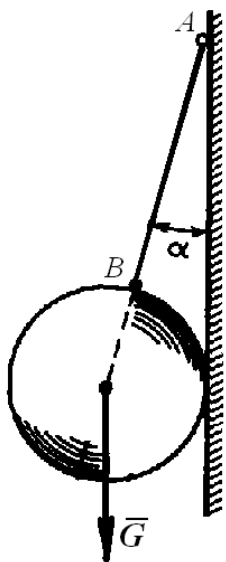
$$N_{AC} = -N_{AB} \cdot \cos(90^\circ - \beta) - T \cdot \cos(90^\circ - \beta - \alpha) - G \cdot \cos \beta = -20810 \text{ H}.$$

Тағы да сондай нәтиже алдық, яғни стерженьдерде пайда болатын күштер дұрыс анықталған.

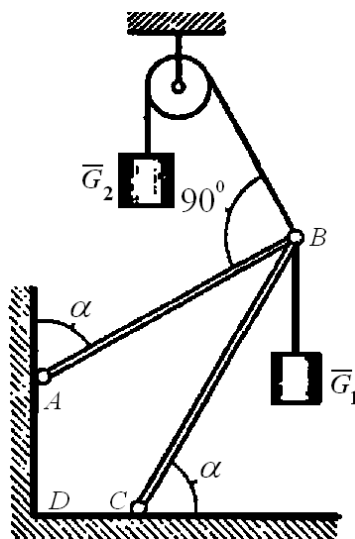
Жаттығу есептері

1-есеп. Салмағы $G = 16$ кН шар жылтыр бетті тік қабырғаға AB шынжырмен ілінген (1-сурет). Шынжыр қабырғамен $\alpha = 30^\circ$ жасайды. Шынжырдың керілу күшін және шардың қабырғаға қысымын анықтаңыз.

2-есеп. ABC стерженьдік құрылыммен салмақтары $G_1 = 16$ кН және $G_2 = 16$ кН екі жүктеме тепе-теңдікте ұстатылған (2-сурет). $\alpha = 60^\circ$. AB және BC стерженьдердің байланыс реакциясын анықтаңыз.



1-сурет



2-сурет

Қайталау сұрақтары:

1. Жинақталатын күштер жүйесі деген не?
2. Жинақталатын күштер жүйесінің әсерін қалай анықтауға болады?
3. Күштер көпбұрышы деген не?
4. Күштер көпбұрышын құрған кезде жинақталатын күштер жүйесінің тең әсер күшінің бағыты қалай анықталады?

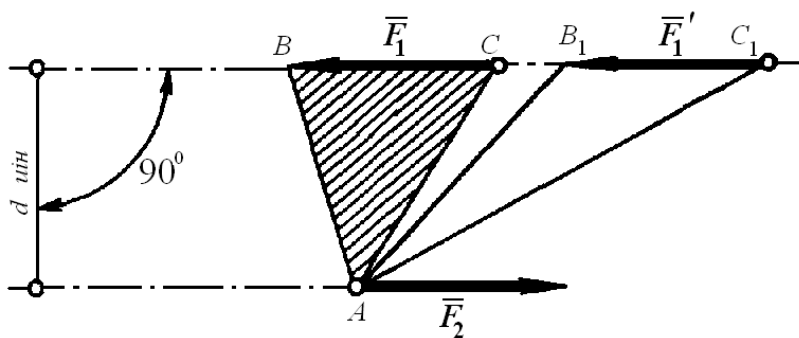
5. Жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерінің координат өстеріндегі проекцияларын қалай анықтайды?
6. Жинақталатын күштер жүйесінің векторлық, геометриялық және аналитикалық түрдегі тепе-теңдік шарттары қандай?
7. Бір жазықта жатқан жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерінің моменті туралы Вариньон теоремасы қалайша дәлелденеді?

3-тарау. ҚОС КҮШ

3.1. Қос күш және оның денеге әсері

Жоғарыда біз күштердің шамасы әртүрлі болған жағдайдағы қарама-қарсы бағытталған екі параллель күшті қосуды қарастырғанбыз. Енді қарама-қарсы бағытталған параллель екі күштің шамалары өзара тең болған жағдайын қарастырайық (3.1-сурет) $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, $F_1 = F_2 = F$.

Модульдері тең және қарама-қарсы бағытталған екі параллель күш жүйесін қос күш деп атайды.



3.1-сурет

XIX ғасырдың басында француз ғалымы Пуансо (1777-1859) механикаға қос күш ұғымын енгізіп, қос күш теориясын тұрғызады. Күш ұғымымен қатар қос күш механикада негізгі ұғымдардың бірі болып табылады.

Қос күшті құрайтын күштер орналасқан жазықтық **қос күш әсерінің жазықтығы**, ал күштердің ең жақын d арақашықтығы **қос күштің иіні** деп аталады. Қос күштің денеге әсері денені айналмалы қозғалысқа келтіруге тырысатынымен сипатталады. Қос күштің денеге жасайтын мұндай әсері \vec{F} күштің шамасы мен d иініне, әсер жазықтығының орналасуына және осы жазықтықтағы қос күштің айналу бағытына тәуелді болады. Қос күш әсері қос күш моментімен анықталады.

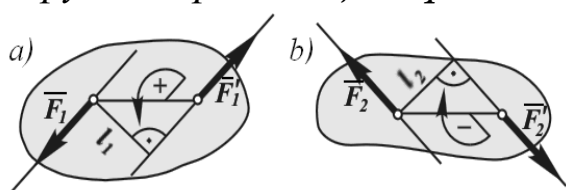
Қос күш моменті деп плюс не минус таңбамен алынған қос күшті құраушы күштердің бірінің модулі мен оның иінінің көбейтіндісін айтады (3.1-сурет).

$$M(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \pm Fd . \quad (3.1)$$

Қос күштің моменті мен күштің моменті бірдей өлшем бірлікпен өлшенеді.

Қос күш моменті шама жағынан табаны осы қос күштің бірі, ал қос күш иіні биіктігі болатын үшбұрыштың екі еселенген ауданына тең (3.1-сурет). Осы суреттен аңғаратынымыз: күштер әсер сызығының бойымен орнын ауыстырғанда, қос күш моментінің шамасы өзгермейді, өйткені ABC және AB_1C_1 үшбұрыштарының аудандары бірдей.

Егер қос күшденені *сағат тілі жүрісіне кері бағытта айналдыруға тырысса, қос күш моменті оң таңбалы* деп (3.2, a-сурет), ал



3.2-сурет

егер *сағат тілі жүрісімен бағыттас айналдыруға тырысса, онда қос күш моменті теріс таңбалы* деп алу (3.2, b-сурет) ұйғарылған.

3.2. Қос күштің негізгі қасиеттері

Бірінші қасиеті. Қос күштің тең әсерлі күші болмайды.

Иіні d болатын (\bar{F}_1, \bar{F}_2) қос күш берілсін делік және $F_2 > F_1$ болсын (3.3, a-сурет).

Олай болса, бұл күштер жүйесінің тең әсерлі күші:

$$R = F_2 - F_1$$

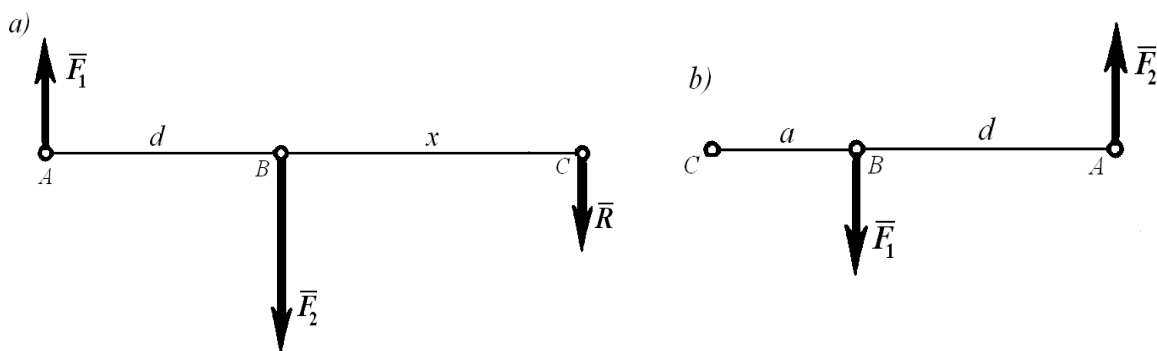
тең болады, ал оның түсу нүктесі келесі пропорциядан анықталады:

$$\frac{R}{F_1} = \frac{h}{x},$$

бұдан

$$x = \frac{F_1 h}{R}.$$

Енді \bar{F}_2 күш модулі біртіндеп азайып, шамасы \bar{F}_1 күшінің модуліне ұмтылсын делік, яғни $F_2 = F_1$ болғанда $R = F_1 - F_2 = 0$.



3.3-сурет

Бұл берілген (\bar{F}_1, \bar{F}_2) қос күштің $F_2 = F_1$ болған жағдайында тең әсерлі күші болмайтынын көрсетеді.

Сонымен, қос күшті бір күшпен теңгеру мүмкін еместігіне және қос күшті тек қос күшпен теңгеруге болатынына көз жеткіземіз.

Екінші қасиеті. Қос күштің құраушы күштерінің әсер жазықтығындағы кез келген нүктеге қатысты алынған моменттерінің алгебралық қосындысы қос күш моментіне тең.

Иіні d болатын (\bar{F}_1, \bar{F}_2) қос күш беріліп, оның моменті:

$$M(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d$$

болсын делік.

Қос күштің әсер жазықтығынан қандай да бір С нүктесін таңдап алып (3.3, b-сурет), оған қатысты қос күшті құраушы \bar{F}_1 мен \bar{F}_2 күштерінің моменттерін анықтайық:

$$M_c(\bar{F}_1) = F_1(a + d); M_c(\bar{F}_2) = -F_2 a.$$

Осы теңдіктердің оң және сол жазықтығы мүшелерін өзара қосайық:

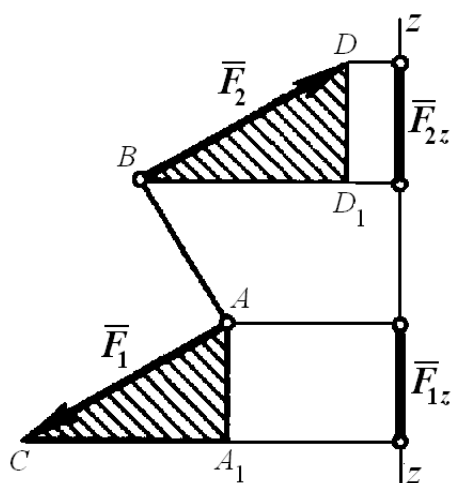
$$M_c(\bar{F}_1) + M_c(\bar{F}_2) = F_1(a + d) - F_2 a = F_1 d,$$

немесе

$$M_c(\bar{F}_1) + M_c(\bar{F}_2) = F_1 d = M(\bar{F}_1, \bar{F}_2).$$

Қос күштің бұл қасиетін былай тұжырымдауға болады: *кез келген момент центрлеріне қатысты құрылған момент теңдеулеріне қос*

күш бірдей таңбамен және бірдей шамамен кіреді, яғни қос күш моментінің таңбасы мен шамасы момент центрінің орнына тәуелсіз.



3.4-сурет

Үшінші қасиеті. Қос күштің құраушы күштерінің кез келген өстегі проекцияларының алгебралық қосындысы әрқашан нөлге тең.

(\bar{F}_1, \bar{F}_2) қос күші және қос күштің әсер жазықтығында жататын z өсі берілсін делік (3.4-сурет).

Суретте көрсетілген $\triangle CAA_1$ және $\triangle BDD_1$ үшбұрыштарының теңдігінен $F_{1z} = -F_{2z}$ екені көрінеді.

Бұл проекциялардың алгебралық қосындысы әрқашан нөлге тең, өйткені

F_{2z} проекциясы оң таңбалы да, F_{1z} проекциясы теріс таңбалы.

Атап өтсек, қос күш не күш теңдеулеріне, не күштің проекциялық теңдеулеріне кірмейді.

3.3. Қос күш эквиваленттілігі

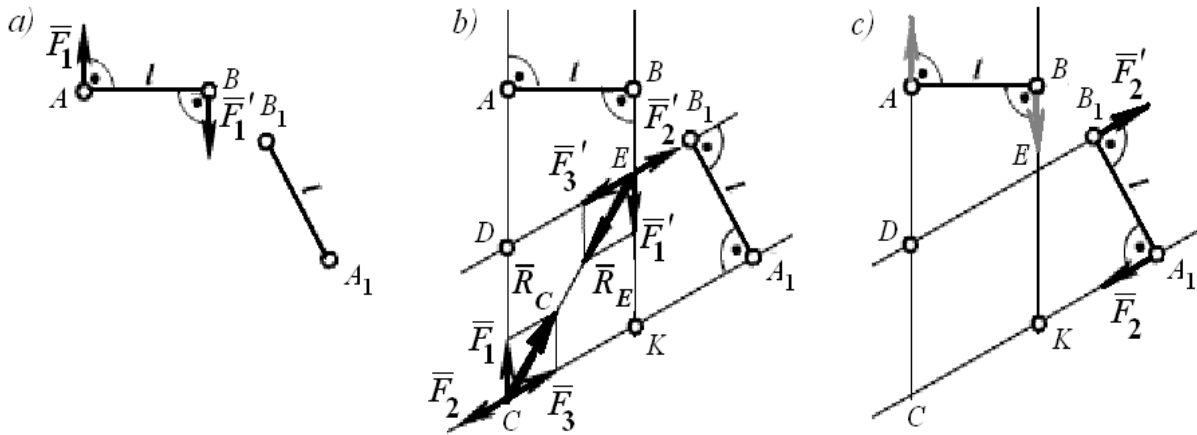
Еркін қатты дененің механикалық күйін өзгертпей, бір қос күшті екінші бір қос күшпен алмастыру мүмкін болса, онда бұл қос күш парапар деп аталады.

1-теорема. Қос күштің денеге әсері оны әсер ету жазықтығында басқа орынға ауыстырғаннан өзгермейді.

Иіні $AB = l$ (\bar{F}_1, \bar{F}_1') қос күші беріліп, қос күшті иіні $A_1B_1 = l$ болатын кездейсоқ алынған орынға ауыстыру қажет болсын делік (3.5, а-сурет).

A мен B және A_1 мен B_1 нүктелерінен тиісінше AB және A_1B_1 кесінділеріне перпендикуляр, параллель түзулер жүргізейік (3.5, b-сурет). Екі параллель түзудің екінші параллель түзумен қиылысады және қиылысында $CDEK$ ромб пайда болады (өйткені берілгені бойынша $AB = A_1B_1 = l$, ал параллелограмның бір төбесінен түсірілген биіктіктер тең болса, онда ол – ромб). \bar{F}_1 күшін әсер ету сызығының бойымен A нүктесінен C нүктесіне, ал \bar{F}_1' күшін B нүктесінен E нүктесіне түсірейік. CA_1 түзуінің бойымен C нүктесіне, модульдері

F_1 -ге тең теңестірілген \bar{F}_2 және \bar{F}_3 күштер жүйесін түсірейік; DB_1 түзуінің бойымен E нүктесіне де модульдері \bar{F}_1' -ке тең, теңестірілген \bar{F}_3' және \bar{F}_2' күштер жүйесін түсірейік, сонымен, $F_1 = F_2 = F_3 = F_1' = F_2' = F_3'$.



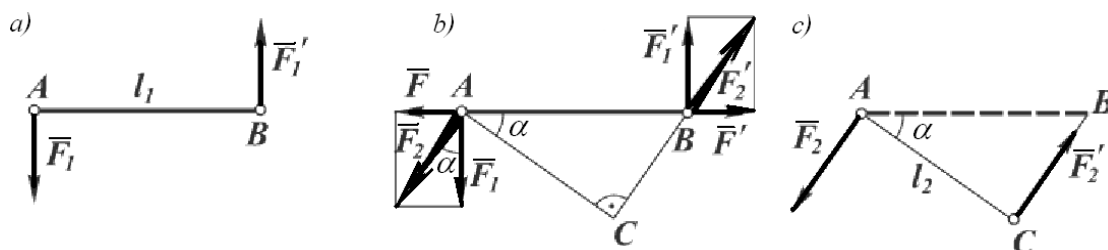
3.5-сурет

C нүктесіне түсірілген \bar{F}_1 және \bar{F}_3 күштерінің тең әсерлі \bar{R}_C күшін және E нүктесіне түсірілген \bar{F}_1' және \bar{F}_3' күштерінің тең әсерлі \bar{R}_E күшін анықтайық. \bar{R}_C пен \bar{R}_E күштері бірін-бірі теңестіретінін аңғару қиын емес, өйткені олардың шамалары өзара тең және олар $CDEK$ ромбысы диагоналының бойымен қарама-қарсы бағытта әсер етеді. Сөйтіп, \bar{F}_1 , \bar{F}_3 , \bar{F}_3' және \bar{F}_1' күштері теңестірілген күштер жүйесін құрайды, яғни $\{\bar{F}_1, \bar{F}_3, \bar{F}_3', \bar{F}_1'\} \sim 0$. Олай болса, оларды қарастырмай-ақ қоюға болады, сонда қарастырылған күштер жүйесінен тек екі күш қалады: C нүктесіндегі \bar{F}_2 күші мен E нүктесіндегі \bar{F}_2' күші. Бұл күштерді әсер сызықтарының бойымен жылжыта отырып, тиісінше A_1 және B_1 нүктелеріне түсірсек, онда иіні AB болатын (\bar{F}_1, \bar{F}_1') қос күшіне парапар келетін иіні A_1B_1 -ге тең (\bar{F}_2, \bar{F}_2') қос күшін аламыз (3.5, c -сурет), өйткені \bar{F}_1 , \bar{F}_1' , \bar{F}_2 және \bar{F}_2' күштерінің модульдері және AB мен A_1B_1 иіндері тең. Сонымен, берілген қос күшті басқа орынға ауыстырдық (3.5, c -сурет). Бұл теореманың дәлелденгенін көрсетеді.

2-теорема. Моменттері өзара тең бір жазықтықтағы екі қос күштің денеге әсерлері бірдей болады.

Иіні $AB = l_1$ (\bar{F}_1, \bar{F}_1') қос күші берілсін делік. Онда қос моменті $M_1 = F_1 l_1$ болады (3.6, a -сурет).

Қос күшке AB иіні бойымен әсер ететін теңестірілген \bar{F} пен \bar{F}' күштерін біріктірейік (3.6, *b*-сурет) және \bar{F}_1 мен \bar{F} , сонымен қатар \bar{F}_1' пен \bar{F}' күштерін қос-қостап қосайық. Олардың тең әсерлі күштері \bar{F}_2 мен \bar{F}_2' , иіні $AC = l_2$ тең жаңа қос күшті құрайды (3.6, *c*-сурет).



3.6-сурет

Жоғарыда жүргізілген түрлендірулер статиканың аксиомаларына негізделіп жүргізілді және дененің алғашқы күйін еш өзгертпейді, яғни (\bar{F}_2, \bar{F}_2') қос күші денеге (\bar{F}_1, \bar{F}_1') қос күшіндей әсер етеді. Енді қос күштің моменттерінің теңдігін дәлелдеу керек:

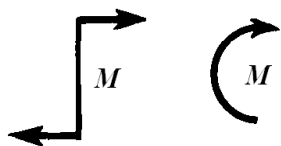
$$(\bar{F}_1, \bar{F}_1') \text{ қос күшінің моменті} \quad M_1 = F_1 l_1,$$

$$(\bar{F}_2, \bar{F}_2') \text{ қос күшінің моменті} \quad M_2 = F_2 l_2.$$

3.6, *c*-суреттегі сызбадан $l_2 = l_1 \cos \alpha$, $F_2 = F_1 / \cos \alpha$ екені көрінеді, олай болса, $M_2 = F_2 l_2 = (F_1 / \cos \alpha) l_1 \cos \alpha = F_1 l_1$, яғни $M_2 = M_1$.

Теорема дәлелденді.

*Бір жазықтықта жататын, әсер ететін моменттері тең қос күш статикалық **тепе-тең** деп аталады.*



3.7-сурет

Дәлелденген теорема бойынша берілген жазықтықта жатқан қос күштің айналдыру әсері оның моментіне тәуелді, сондықтан қос күштің берілуі оның моментінің шамасын көрсетсе жеткілікті, онан кейін берілген немесе таңдап алынған иін бойынша қосақтағы күштің мәнін немесе күш бойынша қажетті иінді анықтауға болады. Осыған байланысты суреттер мен сызбаларда қос күшті оның айналдыру әсерінің бағытын көрсететін дөңгелек жебемен кескіндейді. Мысалы, стерженьге түсірілген қос

күшті (3.7-сурет), оларды M деп белгіленген дөңгелек жебемен шартты түрде кескіндеуге болады (3.7-сурет).

3.4. Бір жазықтағы қос күшті қосу. Қос күштің тепе-теңдік шарты

Теорема. Денеге бір жазықтықта әсер ететін қос күш жүйесі моменті қос күштің моменттерінің алгебралық қосындысына тең болатын қос күшпен тепе-тең.

Бір жазықтықта жататын моменттері M_1 , M_2 және M_3 болатын үш қос күш берілсін делік (3.8, а-сурет). Берілген қос күшті оларға тепе-тең иіндері бірдей $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = l$ (\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2) және (\vec{F}_3, \vec{F}'_3) қос күшімен алмастырайық, яғни $M_1 = F_1 l$, $M_2 = F_2 l$, $M_3 = F_3 l$ және осы қос күшті, олардың күштері екі параллель түзудің бойымен әсер ететіндей етіп орналастырайық (3.8, б-сурет).

Бір түзудің бойында әсер ететін күштердің тең әсерлі күшінің осы түзудің бойымен бағытталады және модулі құраушы күштердің шамаларының алгебралық қосындысына тең екені бізге белгілі. Олай болса, A_1, A_2, A_3 нүктелері мен B_1, B_2, B_3 нүктелеріне түсірілген күштерді қосып, берілген үш қос күшіне тепе-тең (\vec{F}, \vec{F}') қос күшін аламыз (3.8, с-сурет). Сонымен қатар $F = F_1 - F_2 + F_3$.

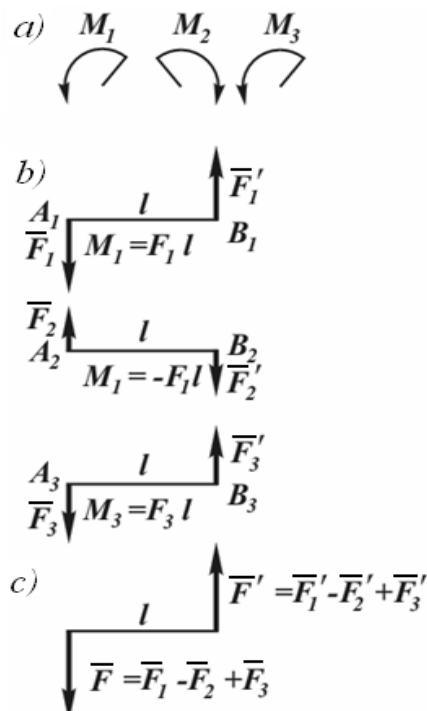
(\vec{F}, \vec{F}') тең әсерлі қос күшінің моменті $M = F \cdot l$, ал $F = F_1 - F_2 + F_3$ болғандықтан:

$$M = (F_1 - F_2 + F_3) \cdot l = F_1 \cdot l - F_2 \cdot l + F_3 \cdot l,$$

немесе

$$M = M_1 - M_2 + M_3. \quad (3.2)$$

Теорема дәлелденді.



3.8-сурет

(3.2) теңдігі жалпы түрде былайша жазылады:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (3.3)$$

Сонымен, денеге бір жазықтықта әсер ететін бірнеше қос күшті қосу үшін, осы қос күш моменттерінің алгебралық қосындысын анықтау жеткілікті. Қосу нәтижесінде алынған момент **тең әсерлі қос күшті** анықтайды.

Егер қосу нәтижесінде $M = 0$ болса, онда денеге әсер ететін қос күш **теңгерілген қос күшті** құрайды. Сонымен, қос күш жүйесінің тепе-теңдігінің қажетті және жеткілікті шарты бір теңдеумен өрнектеледі:

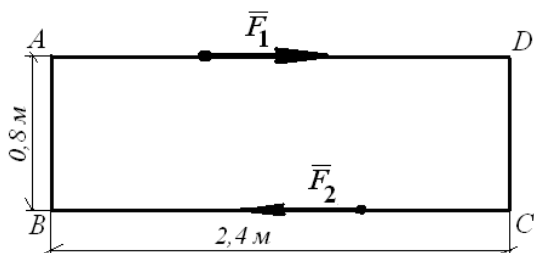
$$M = 0, \quad (3.4)$$

яғни денеге бір жазықтықта әсер ететін қос күш жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін, жүйедегі қос күш моменттерінің алгебралық қосындысының нөлге тең болуы қажетті де жеткілікті.

Сонымен, қос күш жүйесін немесе бір қос күшті тек қос күшпен ғана теңестіруге болады.

3.5. Есептерді шешудің әдістемесі

3.1-мысал. $ABCD$ тік төртбұрышының ұзын қабырғаларының бойымен (\vec{F}_1, \vec{F}_2) қос күштері әсер етеді (3.9-сурет). $F_1 = F_2 = 60 \text{ Н}$. Күштерін тік төртбұрыштың қысқа қабырғаларының бойымен бағыттап, (\vec{F}_1, \vec{F}_2) қос күшін теңестіретін тік төртбұрышқа қандай қос күш түсіру қажет?



3.9-сурет

Шешуі: Берілген қос күштің моментін

$$M_{12} = -F_1 \cdot AB$$

моменті M_{34} деп белгіленген қос күшпен теңестіреміз.

Сонда тепе-теңдік шартына сәйкес:

$$M_{12} + M_{34} = 0$$

шығады.

Мұнан:

$$M_{34} = -M_{12} = -(-F_1 \cdot AB) = 60 \cdot 0,8 = 48 \text{ Нм}$$

аламыз.

Ізденді қос күштііні BC деп ала отырып, (\bar{F}_3, \bar{F}_4) деп белгілейік.

Сонда:

$$M_{34} = F_3 \cdot BC = F_4 \cdot BC .$$

Бұл теңдіктен

$$F_3 = F_4 = \frac{M_{34}}{BC} = \frac{48}{2,4} = 20 \text{ Н}.$$

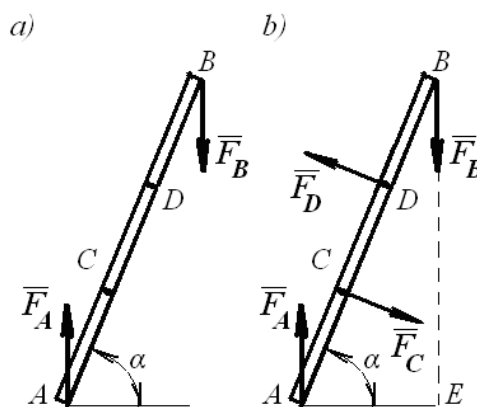
алынады.

Сонымен, тік төртбұрышқа моменті 48 Нм , оң таңбалы қос күш түсіру қажет. Бұл қос күшті құрайтын күштердің шамалары 20 Н және олардың бірі AB қабырғасының бойымен A нүктесінен B нүктесіне қарай, ал екіншісі CD қабырғасының бойымен C нүктесінен D нүктесіне қарай әсер етуге тиіс.

3.2-мысал. AB түзу стержені, 3.10, a -суретте көрсетілгендей ($\alpha = 60^\circ$), тепе-теңдік қалпында тұр. Мұнымен қатар A және B нүктелерінде, (\bar{F}_A, \bar{F}_B) қос күшті құрайтын, тік бағытталған \bar{F}_A және \bar{F}_B күштері әсер етеді (3.10, a -сурет). Стерженьнің тепе-теңдігін қамтамасыз ету үшін, C және D нүктелеріне бағыттары стерженьге перпендикуляр қандай екі күш түсіруіміз қажет? $AB = 3 \text{ м}$, $CD = 1 \text{ м}$, $F_A = F_B = 100 \text{ Н}$.

Шешуі: Қос күшті тек қос күшпен теңгеруге болады. Сондықтан C және D нүктелеріне, (\bar{F}_A, \bar{F}_B) қос күштің моментіне тең момент беретін қос күшті құрайтын, шамалары тең, бағыттары қарама-қарсы екі күш түсіру қажет.

(\bar{F}_A, \bar{F}_B) қос күші стерженьді сағат тілінің жүрісі бағытында бұратындықтан, ізденді күштер стерженьді сағат тілі жүрісіне қарсы бұруы керек (3.10, b -сурет).



3.10-сурет

Қос күштің тепе-теңдік шарттарын қолданып:

$$M_{AB} + M_{CD} = 0,$$

немесе моменттердің мәндерін қойып:

$$-F_A \cdot AE + F_C \cdot CD = 0$$

ізденді күштердің шамаларын анықтайтын қажетті теңдеуді аламыз.

Мұндағы

$$AE = AB \cdot \cos \alpha .$$

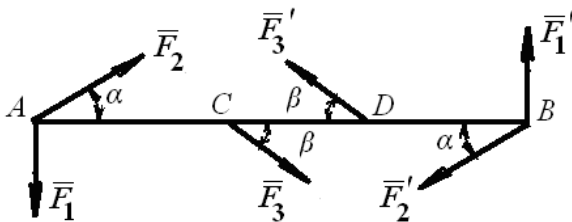
Сөйтіп,

$$F_C = \frac{F_A \cdot AE}{CD} = \frac{100 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ}{1} = 150 H.$$

Сонымен, C және D нүктелеріне, 3.10, b -суретте көрсетілгендей, шамалары $150 H$ \bar{F}_C және \bar{F}_D күштерін түсіру қажет.

3.3-мысал. AB стерженіне (\bar{F}_1, \bar{F}_1') , (\bar{F}_2, \bar{F}_2') , (\bar{F}_3, \bar{F}_3') үш қос күш құрайтын алты күш әсер етеді (3.11-сурет). $F_1 = F_1' = 25,5 H$, $F_2 = F_2' = 50 H$, $F_3 = F_3' = 40 H$. $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 40^\circ$. Ұзындық $CD = 0,5 м$ болса, онда осы қос күш теңгерілген жиын құру үшін AB стерженінің ұзындығы қандай болуы керек?

Шешуі: Қос күштің моменттерін өрнектейік:



3.11-сурет

$$M_1 = F_1 \cdot AB,$$

$$M_2 = F_2 \cdot \sin \alpha \cdot AB,$$

$$M_3 = F_3 \cdot \sin \beta \cdot CD.$$

Қос күш жиынының тепе-теңдік шарты:

$$\sum M_i(\bar{F}_i, \bar{F}_i') = 0; M_1 - M_2 + M_3 = 0.$$

Бұл өрнекке M_1 , M_2 және M_3 моменттерін енгізейік:

$$F_1 \cdot AB - F_2 \cdot \sin \alpha \cdot AB + F_3 \cdot \sin \beta \cdot CD = 0.$$

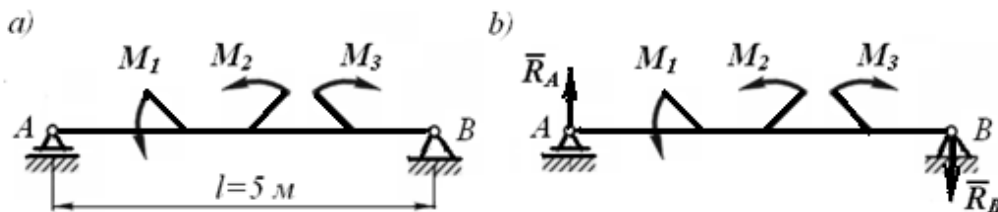
Осы өрнектен ізденді стерженнің ұзындығын өрнектейміз:

$$AB = \frac{F_3 \cdot \sin \beta \cdot CD}{-F_1 + F_2 \cdot \sin \alpha} = \frac{40 \cdot \sin 40^\circ}{-25,5 + 50 \cdot \sin 35^\circ} = 8,1 \text{ м.}$$

Сонымен, берілген қос күштер теңгерілген жиын құру үшін AB стерженінің ұзындығы 8,1 м болуы қажет.

3.4-мысал. Сол жақтағы ұшы жылжымалы топсалы тірекпен және оң жақтағы ұшы жылжымайтын топсалы тірекпен бекітілген, ұзындығы $l = 2 \text{ м}$, AB арқалығы моменттері $M_1 = 24 \text{ Нм}$, $M_2 = 36 \text{ Нм}$ және $M_3 = 50 \text{ Нм}$ үш қос күшпен жүктелген (3.12, a -сурет). Тіректердің реакцияларын анықтаңыз.

Шешуі: Арқалыққа қос күште жиыны түсірілген, сондықтан оларды теңгеруші күштерде қос күш болуы керек, яғни арқалыққа әсер ететін тірек реакциялары қос күшті құруға тиіс. Арқалықтың A нүктесінде жылжымалы топсалы тірек, яғни оның \bar{R}_A реакциясы тірек жазықтығына перпендикуляр бағытталады, яғни қарастырып отырған жағдайда арқалыққа перпендикуляр. Оның бағытын жоғары деп алайық. Онда B нүктесіндегі жылжымайтын топсалы тіректің \bar{R}_B реакциясы да арқалыққа перпендикуляр, бірақ бағыты төмен болады. Сонымен, тірек реакциялары бір-біріне параллель және шамалары тең, бағыттары қарама-қарсы болып, бұл күштер берілген қос күштердің теңгеруші қос күшті құруға тиіс (3.12, b -сурет).



3.12-сурет

(\bar{R}_A, \bar{R}_B) қос күштің моменті

$$M_0 = R_A \cdot AB \text{ немесе } M_0 = R_B \cdot AB$$

AB арқалығының тепе-теңдік шартын құрамыз:

$$-M_0 + M_1 + M_2 - M_3 = 0,$$

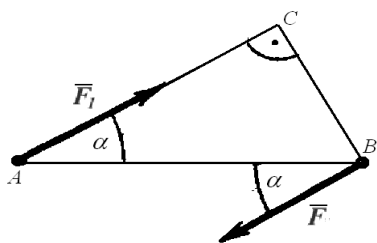
осыдан:

$$R_A = R_B = \frac{M_1 + M_2 - M_3}{AB} = \frac{24 + 36 - 50}{2} = 5 \text{ H}.$$

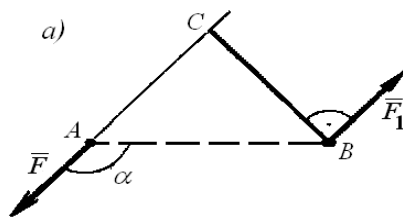
шығады.

Жаттығу есептері

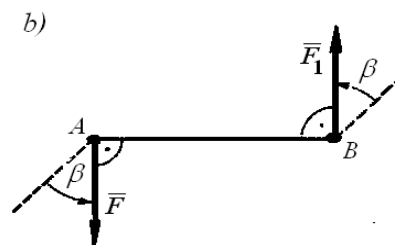
1-есеп. Егер $F = F_1 = 20 \text{ H}$ болса, қос күштің моменті неге тең (1-сурет)? $AB = 0,5 \text{ м}$ және $\alpha = 30^\circ$.



1-сурет

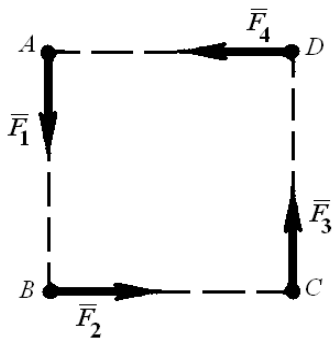


2-сурет

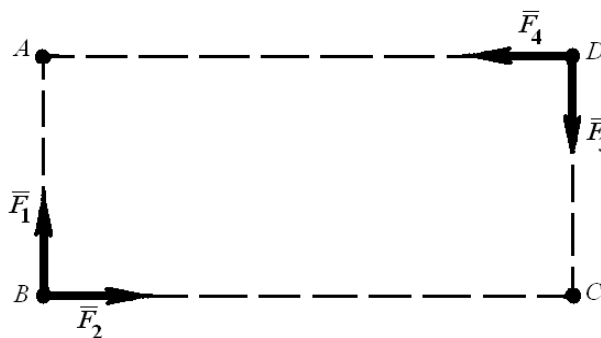


2-есеп. 2, a -суретте көрсетілген (\vec{F}, \vec{F}_1) қос күштің моменті, егер қос күштің құраушы күштерін AB кесіндісіне перпендикуляр етіп бұрса (2, b -сурет), қалайша өзгереді? $F = F_1 = 50 \text{ H}$, $AB = 0,4 \text{ м}$ және $\alpha = 135^\circ$.

3-есеп. Қабырғалары $0,5 \text{ м}$ квадраттың төбелері болатын A, B, C, D нүктелеріне (\vec{F}_1, \vec{F}_3) және (\vec{F}_2, \vec{F}_4) екі қос күш түзетін, модульдері тең ($F = 12 \text{ H}$) күштер түсірілген (3-сурет). Берілген күштердің тең әсерлі қос күшінің моментін анықтаңыз.



3-сурет



4-сурет

4-есеп. $ABCD$ тіктөртбұрышының B және D төбелерінің әрқайсысына (\vec{F}_1, \vec{F}_3) және (\vec{F}_2, \vec{F}_4) екі қос күш түзетін екі күштен түсірілген (4-сурет). Егер $F_1 = F_3 = 15\text{H}$, $F_2 = F_4 = 10\text{H}$, $AB = DC = 0,2\text{ м}$ және $AD = BC = 0,5\text{ м}$ болса, теңәсерлі қос күштің моменті неге тең?

Қайталау сұрақтары;

1. Қос күш және қос күш моменті дегеніміз не?
2. Қос күштің денеге әсерінің қандай сипаттамалары бар?
3. Бір жазықтықтағы қос күш қандай жағдайда эквивалентті?
4. Қос күштің иіні мен құраушы күшін өзгерткеннен денеге әсері қандай жағдайда өзгермейді?
5. Бір жазықта жатқан қос күштің қорытынды қос күшін қалай табуға болады?
6. Тең әсерлі қос күш қалай табылады?
7. Қос күштің тепе-теңдік шарты қалай жазылады?
8. Күш моменті мен қос күш моментінің қандай ортақ және өзіндік қасиеттері бар?

4-тарау. ЕРКІН КҮШТЕР ЖҮЙЕСІ

4.1. Жазық параллель күштер жүйесі

Әсер сызықтары бір жазықта жататын және параллель болатын күштер жүйесін *жазық параллель күштер жүйесі* деп айтады.

Бір бағытталған екі параллель күшті қосу. Бір бағытталған екі параллель күштің тең әсерлі күші берілген күштер қосындысына тең де, осы күштерге параллель және бағыттас болады, ал оның әсер сызығы берілген екі күштің түсу нүктелерін қосатын кесіндіні сол күштердің модульдеріне кері пропорционал болатындай етіп екі бөлікке іштей бөлетін нүктеден өтеді (4.1, а-сурет), яғни

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2), \vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2, F_1 \neq F_2, R = F_1 + F_2, \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

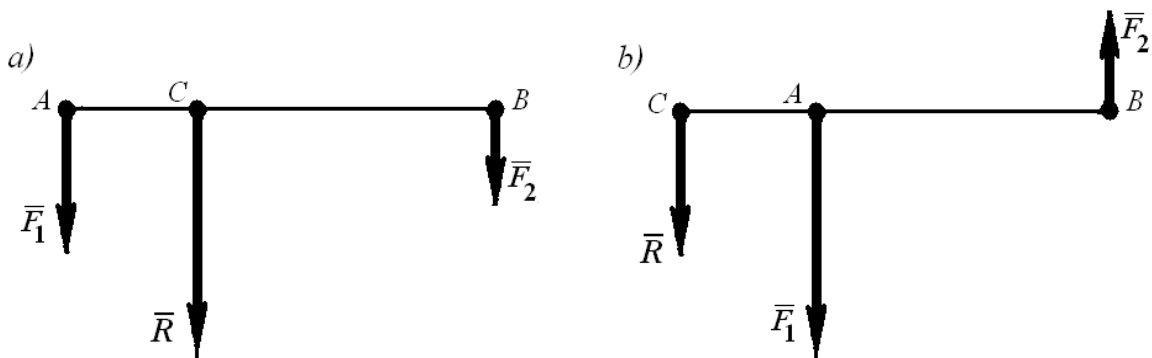
Осы пропорциялық қатынастан төмендегідей туынды пропорция құра аламыз:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_1 + F_2}{BC + AC},$$

немесе

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

Жоғарыдағы тұжырымдаманы *бір бағытталған екі параллель күшті қосу теориясы* немесе *бір бағытталған екі параллель күшті қосу* деп атайды.



4.1-сурет

Қарама-қарсы бағытталған екі күшті қосу. Қарама-қарсы бағытталған, модульдері тең емес екі параллель күшті қосуды қарастырайық.

Теорема. *Модульдері тең емес қарама-қарсы бағытталған екі параллель күштің тең әсерлі күш берілген күштер айырмасына тең де, осы күштерге параллель және үлкен күшпен бағытталса болады, ал әсер сызығы берілген екі күштің түсу нүктелерін қосатын кесіндіні сол күштердің модульдеріне кері пропорционал болатындай етіп, екі бөлікке сырттай бөлетін нүктеден өтеді.*

Қатты дененің A және B нүктелерінде \bar{F}_1 және \bar{F}_2 күштері түсірілген болсын, сонымен қатар $F_1 > F_2$ деп берілсін. Осы екі күштің тең әсер күшін анықтайық (4.1, b -сурет). Ол үшін \bar{F}_1 күшін өзімен бағытталса екі параллель күшке жіктейік

$$\bar{F}_1 \sim (\bar{R}, \bar{F}'_2); \quad F_1 = R + F'_2.$$

Мұндағы \bar{F}'_2 құраушы күшті B нүктесіне түсіріп, шамасы жағынан $F'_2 = F_2$ болатындай етіп алайық, яғни $(\bar{F}_2, \bar{F}'_2) \sim 0$.

Олай болса, берілген күштер жүйесі бір күшке эквивалентті

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim (\bar{R}, \bar{F}'_2, \bar{F}_2) \sim \bar{R}.$$

Сонымен, қарама-қарсы бағытталған екі параллель күштің тең әсерлі күші болатынын дәлелдедік. Енді осы күштің модулі мен түсу нүктесін анықтайық. Ол үшін бір бағытталған екі параллель күшті қосу теоремасы негізінде мынадай теңдік құрамыз:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F'_2}{AC} = \frac{R}{AB}$$

Бұл жерде $F'_2 = F_2$ екенін ескерсек,

$$F_1 = R - F_2, \quad \frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

Осы өрнектерден тең әсерлі күштің модулі мен түсу нүктесі анықталады, яғни

$$R = F_1 - F_2,$$

$$AC = \frac{F_2}{R} AB \text{ немесе } BC = \frac{F_1}{R} AB.$$

Сонымен, теорема толығымен дәлелденді.

Екі параллель күштің тең әсерлі күші берілген күштердің алгебралық қосындысына тең екенін атап өтейік.

Егер қатты денеге n параллель күштер иіні түскен болса, оның тең әсерлі күшінің модулін, бағытын және түсу нүктесін параллель күштерді қосу ережесін берілген күштер жүйесіне біртіндеп пайдалана отырып анықтауға болады.

Параллель күштер жүйесінің тең әсерлі күші берілген жүйе күштерінің алгебралық қосындысына тең екені айқын

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n.$$

Сонымен, *параллель күштердің тең әсерлі күшінің шамасы олардың алгебралық қосындысына тең:*

$$R = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (4.1)$$

Тең әсерлі күштің түсу нүктесін және бағытын анықтау мәселесі алдыңғы тақырыптарда қарастырылады.

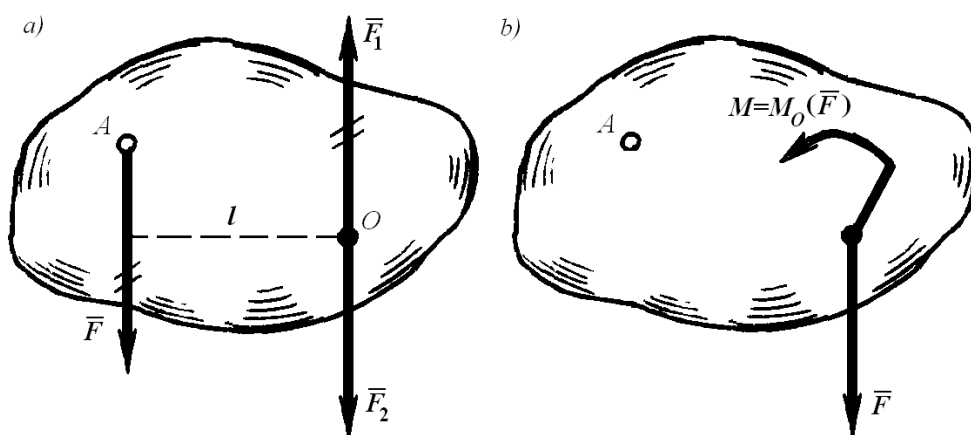
Атап өтетін жайт: дәлелденген теоремаларды пайдаланып, күшті өзіне параллель бағытас немесе қарама-қарсы бағытталған екі параллель күштерге жіктеуге болады. Бұл мәселе таңдап алынатын құраушы күштің модуліне, бағытына және түсу нүктесіне қатысты бірнеше шешімді статикалық анықталмаған есептер қатарына жатады.

4.2. Күшті берілген нүктеге келтіру. Еркін жазық күштер жүйесін берілген нүктеге келтіру

Екі ғасырдай бұрын Л.Пуансо күшті кез келген берілген немесе таңдап алынған нүктеге көшіруге болатыны жөніндегі теореманы дәлелдеді.

Денеге әсер ететін кез келген \vec{F} күшін дененің қандай да бір O нүктесіне өзіне-өзі параллель көшіру қажет делік (4.2, *a*-сурет).

Ол үшін O келтіру нүктесіне \vec{F} күшіне параллель теңестірілген \vec{F}_1, \vec{F}_2 күш жүйесін түсірейік (4.2, *a*-сурет), яғни $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, $F_1 = F_2 = F$, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$, $R = F_1 - F_2 = 0$. Енді O нүктесінде түсірілген \vec{F}_2 күшімен қатар, моменті $M = Fl$ қос күш (\vec{F}, \vec{F}_1) пайда болды (4.2, *b*-сурет). Бір жағынан берілген \vec{F} күштің O келтіру нүктесіне қарағандағы моменті де $M_O(\vec{F}) = Fl$, яғни $M = M_O(\vec{F})$.



4.2-сурет

Сонымен, *денеге әсер ететін кез келген күшті дененің қандай да бір нүктесіне өзіне-өзі параллель көшіруге болады, бұл жағдайда келтіру нүктесіне күшпен қатар моменті берілген күштің жаңа түсіру нүктесіне қатысты моментіне тең қос күшті қосу қажет.*

Осы сияқты күштің орнын ауыстыруды **күшті берілген нүктеге келтіру** деп атайды, ал пайда болған моментті $M = M_O(\vec{F})$ (\vec{F}, \vec{F}_1) қос күшін **тіркеме қос күш** дейді.

$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ жазық күштер жүйесі берілген делік және оның құраушы күштері бір-біріне параллель емес және олардың әсер ету сызықтары бір нүктеде қиылыспайды (4.3-сурет).

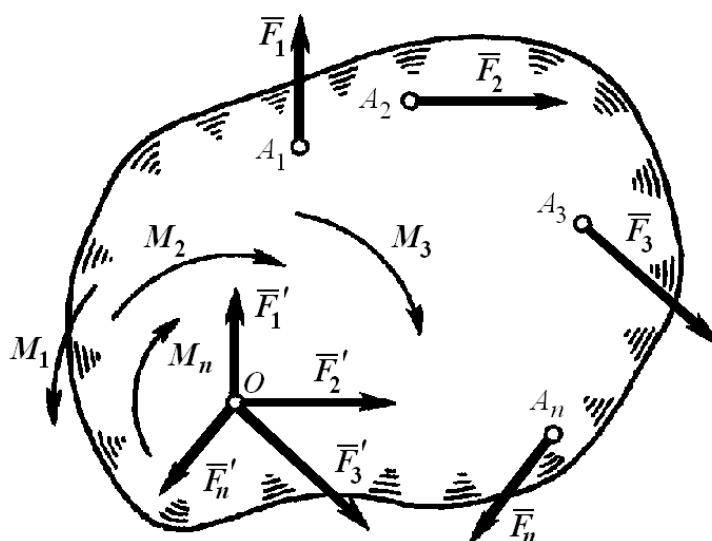
Күш жазықтығында тандап алынған кез келген O келтіру нүктесіне барлық күштерді өзіне-өзі параллель көшіріп, тіркеме n қос күш түсіреміз. Бұл қос күштің моменті берілген күштердің O келтіру нүктесіне қарағандағы моменттеріне тең. Берілген еркін бағытталған жазық күштер жүйесінің орнына келтіру нүктесіне түсірілген n

жинақталған күштер жүйесі мен моменті берілген күштердің моментіне тең тіркеме қос күш жүйесін аламыз:

$$F'_1 = F_1, F'_2 = F_2, \dots, F'_n = F_n;$$

$$M_1 = M_O(\bar{F}_1), M_2 = M_O(\bar{F}_2), \dots, M_n = M_O(\bar{F}_n).$$

Жаңадан алынған жүйе берілген күштер жүйесіне эквивалентті.



4.3-сурет

Жинақталған күштер жүйесінің векторлық қосындысын анықтап, келтірілген күштердің тепе-теңдік күшін аламыз:

$$\bar{R}^* = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n.$$

Сонымен, берілген күштер жүйесінің векторлық қосындысына тең \bar{R}^* күшін **күштер жүйесінің бас векторы** деп атайды және ол келтіру нүктесіне түсіріледі. Тіркеме қос күш моменттерінің алгебралық қосындысын есептеп, олардың тең әсерлі қос күшінің моментін анықтаймыз:

$$M^* = M_1 + M_2 + \dots + M_n$$

немесе

$$M^* = M_O(\bar{F}_1) + M_O(\bar{F}_2) + \dots + M_O(\bar{F}_n).$$

Берілген күштердің келтіру нүктесіне қарағандағы моменттерінің алгебралық қосындысы **бас момент** деп аталады.

Бас вектор мен бас моменттің жалпы жағдайда жазылу түрі:

$$\bar{R}^* = \sum_1^n \bar{F}_i, \quad (4.2)$$

$$M^* = \sum_1^n M_O(\bar{F}_i). \quad (4.3)$$

Бас күш графикалық жағынан берілген күштерден тұрғызылған көпбұрыштың тұйықтаушы қабырғасы болып табылады. Бас вектордың модулін аналитикалық жолмен мына формуланы пайдаланып есептеуге болады:

$$R^* = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2}}, \quad (4.4)$$

мұнда: $i = 1, 2, \dots, n$.

$$R_x^* = \sum_1^n F_{ix}, \quad R_y^* = \sum_1^n F_{iy}. \quad (4.5)$$

Бас күштің бағыттаушы косинустары:

$$\cos \alpha = \frac{R_x^*}{R^*}, \quad \cos \beta = \frac{R_y^*}{R^*}. \quad (4.6)$$

Бас вектор берілген жазық күштер жүйесінің тең әсерлі күші емес, өйткені ол берілген жүйені тек тіркеме бас моментпен бірге алмастыра алады.

Қасиеттері. 1. Берілген күштер жүйесінің бас векторының модулімен бағыты келтіру нүктесінің орнына тәуелсіз.

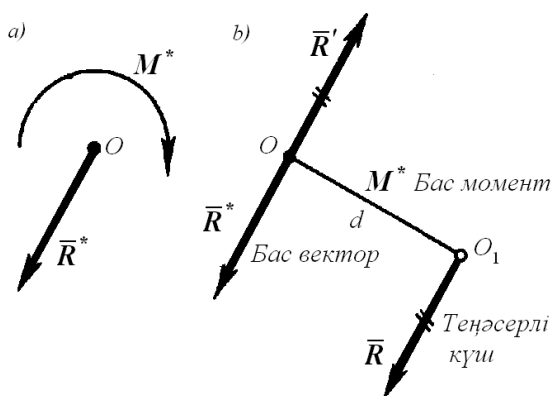
2. Жалпы жағдайда бас моменттің шамасы мен таңбасы келтіру нүктесінің орнына тәуелді.

4.3. Жазық күштер жүйесінің тең әсерлі күші. Вариньон теоремасы

Қандай да бір еркін бағытталған $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\}$ жазық күштер жүйесінің бас векторы \bar{R}^* мен бас моменті \bar{M}^* берілген делік (4.4, a-сурет). Осы жүйенің $\{\bar{R}^*, \bar{M}^*\}$ теңәсерлі күшін анықтайық.

\bar{M}^* бас моментті (\bar{R}, \bar{R}') қос күшімен алмастырайық, мұнда $R = R' = R^*$, $M^* = M(\bar{R}, \bar{R}')$. Қос күштің иіні $d = \frac{M^*}{R}$ (4.4, b-сурет).

Ал O нүктесіндегі \bar{R}^* пен \bar{R}' күштері теңестірілген күштер, яғни $(\bar{R}^*, \bar{R}') \sim 0$, олай болса, келтіру нүктесінен d аралықтағы нүктеге түсірілген \bar{R} теңәсерлі күші ғана қалады. $d = \frac{M^*}{R}$. Сонымен, бас



4.4-сурет

вектор мен бас моменттің тең әсерлі күші анықталды.

Сәйкес күштердің тең әсерлі күші мен моментінің арасындағы тәуелділік жөніндегі теорема француз ғалымы Вариньонның есімімен **Вариньон теоремасы** деп аталады.

Теорема. *Кез келген жазық күштер жүйесінің қандай да бір келтіру нүктесіне қатысты*

алынған тең әсерлі күшінің моменті осы нүктеге қатысты алынған жүйенің құрама күштер моменттерінің алгебралық қосындысына тең.

Шын мәнінде, 4.4-суретте көрсетілгендей, тең әсерлі күштің O нүктесіне қарағандағы моменті $M_O(\bar{R}) = Rd$, мұндағы $d = \frac{M^*}{R}$, олай

болса, $Rd = M^*$.

Демек,

$$M_O(\bar{R}) = M^* .$$

(4.3) формуласына сәйкес

$$M^* = \sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_i).$$

Сондықтан

$$M_O(\bar{R}) = \sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_i). \quad (4.7)$$

Теорема дәлелденді.

4.4. Жазық күштерді келтірудің жеке жағдайлары

Жазық күштер жүйесін $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\}$ қандай да бір нүктеге келтірген жағдайда:

1. Егер $\bar{R}^* \neq 0$, $M^* \neq 0$ болса, онда ол жүйені түрлендіре отырып, \bar{R} тең әсерлі күшке келтіруге болады. Тең әсерлі күш бас вектормен бағыттас және шамалары тең болады, ал түсу нүктесі келтіру нүктесінен d қашықтықта жатады.

2. Егер $\bar{R}^* = 0$, $M^* \neq 0$ болса, онда жүйені тепе-тең қос күшпен алмастыруға болады.

3. Егер $\bar{R}^* \neq 0$, $M^* = 0$ болса, онда жүйені келтіру нүктесіне түсетін \bar{R} тең әсерлі күшке келтіруге болады.

4. Егер $\bar{R}^* = 0$, $M^* = 0$ болса, онда жүйе нөлге тепе-тең, яғни жүйе тепе-теңдікте болады.

Сонымен, *еркін бағытталған жазық күштер жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін, жүйенің бас векторы мен бас моментінің нөлге тең болуы қажет және жеткілікті.*

$$\bar{R}^* = 0, M^* = 0. \quad (4.8)$$

4.5. Еркін бағытталған жазық күштер жүйесінің тепе-теңдік шарты

Егер еркін бағытталған күштердің бас векторы нөлге тең болса, онда оның модулі де нөлге тең, яғни $\bar{R}^* = 0$ болса, онда

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2}} = 0 \text{ немесе } R_x^* = \sum_1^n F_{ix} = 0, R_y^* = \sum_1^n F_{iy} = 0.$$

Осы теңдіктерден тепе-теңдіктің келесі шарттарын аламыз:

1. Еркін бағытталған жазық күштер жүйесінің тепе-теңдікте болуы үшін, жүйені құраушы күштерінің екі координат өстеріндегі проекцияларының алгебралық қосындысы және күш жазықтығындағы кез келген бір нүктеге қатысты алынған күштердің моменттерінің алгебралық қосындысы нөлге тең болулары қажет және жеткілікті:

$$\sum_1^n F_{ix} = 0, \sum_1^n F_{iy} = 0, \sum_1^n M_O(\overline{F}_i) = 0. \quad (4.9)$$

Бұл өрнектерді *тепе-теңдіктің шарты* немесе *тепе-теңдік теңдеуі* деп атайды.

2. Еркін бағытталған жазық күштер жүйесінің тепе-теңдікте болуы үшін, кез келген екі A және B нүктелеріне қатысты жүйені құраушы күштердің моменттерінің алгебралық қосындысы мен AB түзуіне перпендикуляр болып келмеген қандай да бір өстегі (мысалы, Ox өсін алайық) осы күштерпроекцияларының алгебралық қосындысы нөлге тең болулары қажет және жеткілікті:

$$\sum_1^n M_A(\overline{F}_i) = 0, \sum_1^n M_B(\overline{F}_i) = 0, \sum_1^n F_{ix} = 0. \quad (4.10)$$

3. Еркін бағытталған жазық күштер жүйесінің тепе-теңдікте болуы үшін, жүйенің құрама күштерінің бір түзудің бойында жатпайтын кез келген A , B және C нүктелеріне қатысты моменттерінің алгебралық қосындысы нөлге тең болулары қажет және жеткілікті:

$$\sum_1^n M_A(\overline{F}_i) = 0, \sum_1^n M_B(\overline{F}_i) = 0, \sum_1^n M_C(\overline{F}_i) = 0. \quad (4.11)$$

Жеке жағдай. Егер $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n\}$ жазық күштер параллель күштер жүйесі болса, онда тепе-теңдік шарты мынадай түрде жазылады:

1. Жазық параллель күштер жүйесінің тепе-теңдікте болуы үшін, берілген күштерге параллель өстегі жүйені құраушы күштердің проекцияларының алгебралық қосындысы мен күш жазықтығындағы кез келген бір нүктеге қатысты алынған күштердің моменттерінің алгебралық қосындысы нөлге тең болулары қажет және жеткілікті:

$$\sum_1^n F_{iy} = 0, \sum_1^n M_O(\overline{F}_i) = 0. \quad (4.12)$$

2. Жазық параллель күштер жүйесінің тепе-теңдікте болуы үшін, кез келген екі A және B нүктелеріне қатысты жүйені құраушы күштердің моменттерінің алгебралық қосындысы нөлге тең болуы қажет және жеткілікті:

$$\sum_1^n M_A(\overline{F}_i) = 0, \sum_1^n M_B(\overline{F}_i) = 0. \quad (4.13)$$

Мұндағы A мен B нүктелері күштерге параллель түзудің бойында жатпауы керек.

4.6. Кеңістіктегі күштер жүйесі

Егер денеге әсер ететін күштердің әсер сызықтары бір жазықтықта жатпайтын бола, күштер жүйесін *кеңістіктегі күштер жүйесі* деп айтамыз. Жазық күштер жүйесі сияқты кеңістіктегі күштер жүйесін кеңістіктегі кезкелген нүктеге келтіруге болады. Күштерді келтірудің реті жазық күштер жүйесінің ретімен парапар. Бұл жағдайда әрбір күштен келтіру нүктесінде күш және қос күшті аламыз.

Кеңістіктегі берілген күштер жүйесінің барлық күштерінің геометриялық қосындысы бас вектор деп аталады. Бас вектордың модулі жүйенің барлық күштерінің координаттық x , y және z өстеріне проекциялары арқылы анықталады:

$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2}, \quad (4.14)$$

мұндағы $\sum_{i=1}^n F_{ix}$, $\sum_{i=1}^n F_{iy}$, $\sum_{i=1}^n F_{iz}$ – барлық күштердің келтіру нүктесінен өтетін координаттық x , y және z өстеріне проекцияларының алгебралық қосындысы.

Жазық күштер жүйесіне қарағанда кеңістіктегі күштер жүйесінің келтіру нүктесіне қатысты күш моменттері әртүрлі жазықтықта жатады. Сондықтан *күштер жүйесінің бас моменті барлық*

күштердің келтіру нүктесіне қарағандағы моменттерінің геометриялық қосындысы ретінде анықталады.

Берілген күштер жүйесінің қандайда бір келтіру нүктесіне қарағандағы бас моментінің абсолют шамасы келесі формуламен анықталады:

$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n M_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n M_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n M_{iz}\right)^2}. \quad (4.15)$$

мұндағы $\sum_{i=1}^n M_{ix}$, $\sum_{i=1}^n M_{iy}$, $\sum_{i=1}^n M_{iz}$ – барлық күштердің келтіру нүктесінен өтетін координаттық x , y және z өстеріне қарағандағы моменттерінің алгебралық қосындысы.

Кеңістіктегі күштер жүйесінің тепе-теңдігі тек бас вектор және бас момент нөлге тең болған жағдайда орын алады:

$$\bar{R} = 0, \bar{M} = 0. \quad (4.16)$$

Осының негізінде алты тепе-теңдік теңдеуін жазуға болады:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad (4.17)$$

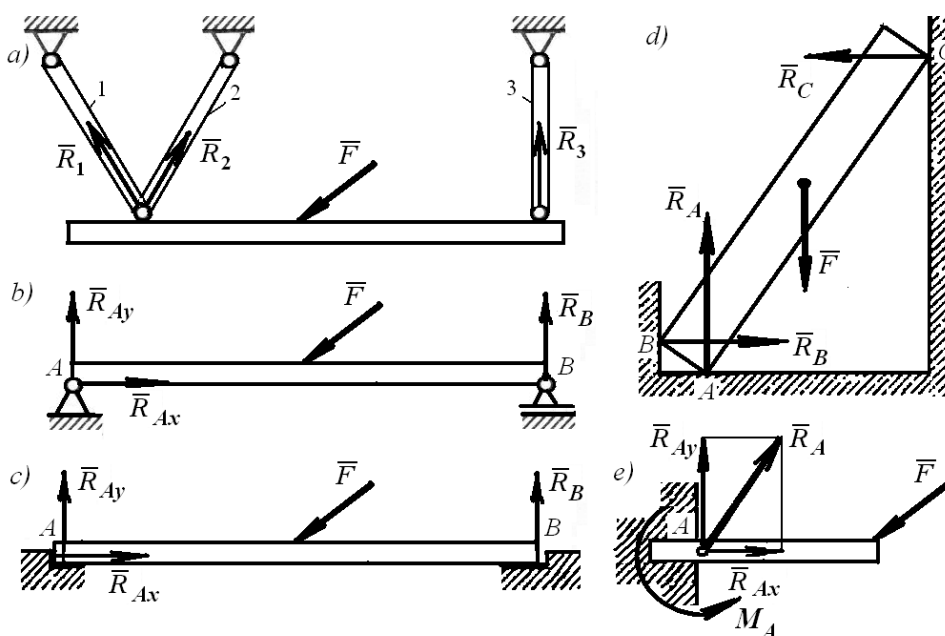
$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0. \quad (4.18)$$

4.7. Арқалықты жүйелер. Жүктемелердің түрлері

Машиналар мен конструкцияларда өте жиі арқалық деп аталатын (немесе арқалықты жүйелер) созылған пішінді денелер кездеседі. *Арқалық* деп қандай да бір құрылымның түзу білік түрінде екі (немесе оданда көп) нүктесінде тірегі бар конструкциялық тетігін айтамыз. Алдыңғы тақырыптан білетініміздей, жазық күштер жүйесінің тепе-теңдік шарты үш теңдеумен өрнектеледі. Олардың көмегімен жүктелген денені қарастыра отырып, денеге түсірілген қандай да бір күштердің шамасы бойынша байланыс реакцияларын,

дара жағдайда тірек реакцияларын анықтауға болады. Осы есепті шешудің жалпы аналитикалық әдісінің түйіні мынада: берілген дене тепе-теңдікте болғандықтан, байланыс реакцияларын бірге есептегенде, денеге әсер ететін күштердің барлығы тепе-теңдік шарттарын орындауы қажет. Осы тұрғызылған тепе-теңдік шарттарынан берілген күштермен қатар белгісіз реакциялар енетін теңдеулер аламыз. Алынған теңдеулер жүйесін шеше отырып, белгісіз күштерді анықтаймыз.

Әрбір жазық күштер жүйесі үшін белгілі анықталған, сәйкес тепе-теңдік теңдеулер саны болады. Мұнан, белгісіз күштердің саны тұрғызылған тепе-теңдік теңдеулердің санына тең болуы қажет. Егер белгісіз күштердің саны теңдеулердің санынан аспаса, онда теңдеулерді шешуге болады. Мұндай есептерді **статикалық анықталған** деп атайды, ал егер белгісіз күштердің саны теңдеулердің санынан асып түссе, есеп **статикалық анықталмаған** болады. Есепті статиканың әдістерімен шешуге болмайды. Статикалық анықталмаған есептерді, тек дененің серпімді қасиеттерін ескере отырып шешуге болады, ал ол жағдай теориялық механикада қарастырылмайды.



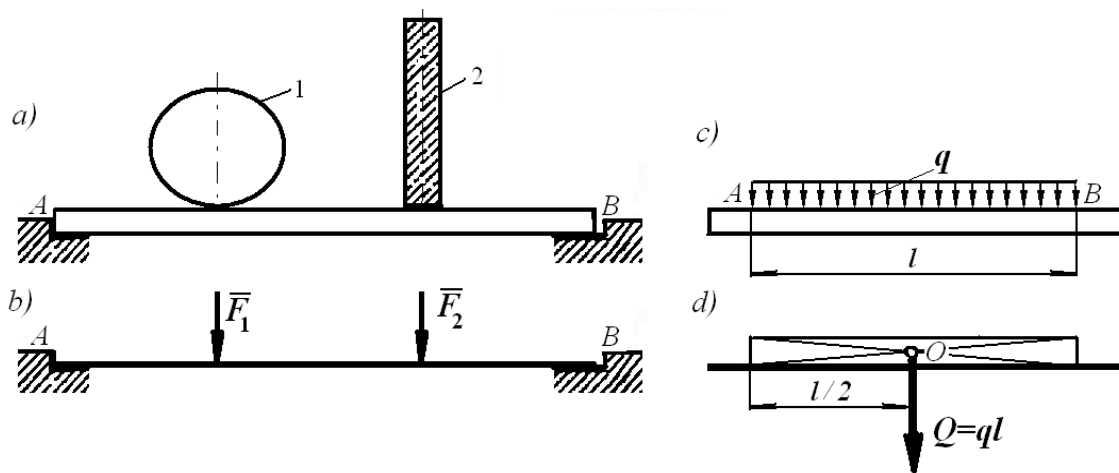
4.5-сурет

Сонымен, арқалық статикалық анықталған, егер ол үш параллель емес топсалы бекітілген стерженьдерге бекітілсе (4.5, a-сурет); оның

екі тірегі болса, олардың бірі топсалы-жылжымайтын, екіншісі топсалы-жылжымалы (4.5, *b*-сурет); бірінің тіреуіші бар екі жылтыр бетке сүйетілсе (4.5, *c*-сурет); үш нүктесімен жылтыр жазықтыққа сүйетілсе (4.5, *d*-сурет); қабырғаға қатаң бекітілсе немесе арнаулы құралмен қыстырылса (4.5, *e*-сурет).

Алғашқы төрт жағдайда арқалыққа түсірілген күш әсері үш тірек реакцияларымен теңестіріледі. Қатаң тірек арқалықтың ілгерілемелі қозғалысымен қатар оның кез келген бағыттағы бұрылуын да шектейді. Сондықтан тірек қимасында $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Ay}$ екі тірек реакциясымен қатар арқалықтың бұрылуын шектейтін моменті M_A қос күш пайда болады.

Жүктеме түсу жағдайына байланысты екі түрге бөлінеді: қадалған және таралған күштер. Осыған дейін біз тек қадалған күштерді, яғни күшті бір нүктеге жинақталған деп қарастырдық. Іс жүзінде күшті бір нүктеге түсіру мүмкін емес, тек кейбір жағдайларда осылай сұлбалау орынды да. Мысалы, арқалыққа түсірілген 1 цилиндрлік дене немесе арқалыққа сүйенген 2 қабырғалық панель (4.6, *a*-сурет). Тірек реакцияларын анықтағанда, арқалықты қадалған \bar{F}_1 және \bar{F}_2 күштермен жүктелген деп қарастыруға болады (4.6, *b*-сурет).



4.6-сурет

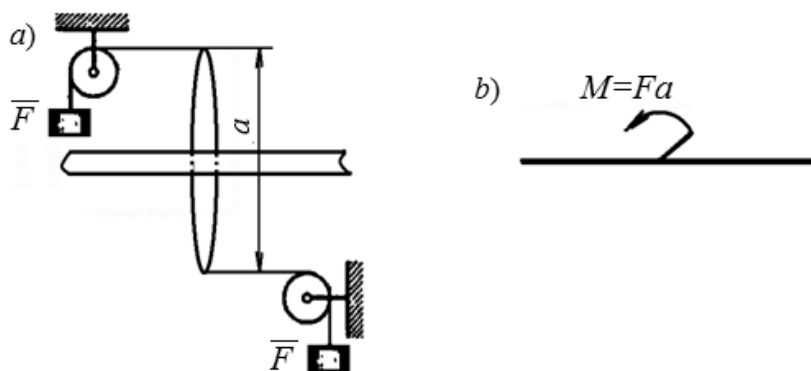
Көптеген жағдайда қарастырылып отырған денеге тұтас жүктеменің түсірілуін ескермеуге болмайды (4.6, *c*-сурет). Тұтас жүктемеге судың бөгеуге қысымы, тасымалдаушының таспасына құмның түсіретін қысымы мысал бола алады және т.б.

Таралған күштердің ішінен тек бірқалыпты таралған күштерді қарастырамыз. Мұндай жүктемелер шартты түрде тіктөртбұрыш

түрінде кескінделеді. Оның ішіне жүктеменің қандай бағытта әсер ететінін көрсететін параллель жебелер түсіріледі (4.6, *c*-сурет).

Бірқалыпты таралған жүктеме екі параметрмен: q **қарқынымен**, яғни ұзындық бірлігіне (m) келетін күш (H немесе kH) бірлігімен және l **ұзындықпен** беріледі. Статиканың есептерінде абсолют қатты арқалыққа түсірілген бірқалыпты таралған күшті оған тең әсерлі \bar{Q} қадалған күшпен алмастыруға болады. Бұл күш таралған күш әсер ететін ұзындықтың ортасына түсіріліп, q қарқындығымен бағыттас болады (4.6, *d*-сурет). Оның шамасы жүктеме әсер ететін l ұзындықпен q қарқындықтың көбейтіндісіне тең.

Сонымен қатар 4.7, *a*-суретте көрсетілгендей, арқалыққа кейбір жағдайда қос күш әсер етеді. Мұндай жағдайда қос күштің арқалыққа әсері, бізге белгілідей, оның моментімен $M = Fa$ өлшенеді және шартты түрде доғалы жебемен кескінделеді (4.7, *b*-сурет).



4.7-сурет

4.8. Есептерді шешудің әдістемесі

А) Жазық күштер жүйесінің тепе-теңдігіне есептер шешу. Жазық күштер жүйесінің тепе-теңдігіне есептер шешу үшін, алдыңғы тақырыпта келтірілген кез келген теңдеулерді қолдануға, есептерді шешуде келесі нұсқауларды басшылыққа алуға болады:

- 1) тепе-теңдігі қарастырылатын денені анықтап алу;
- 2) денені байланыстардан босатып, олардың денеге әсерін байланыс реакцияларымен алмастыру;
- 3) денеге әсер ететін актив күштерді және байланыс реакцияларын векторлар түрінде көрсету;
- 4) координаттар өстерін таңдап алу;

5) тепе-теңдік теңдеулерін тұрғызу. Жазық параллель күштер жүйесінің тепе-теңдігі екі теңдеумен, еркін орналасқан жазық күштер жүйесі үш теңдеумен өрнектеледі.

4.1-мысал. AB арқалығына қарқындығы $q = 2\text{Н/м}$ таралған күш және $F = 6\text{ Н}$ қадалған көлбеу күш әсер етеді (4.8, a -сурет). Егер $a = 1,5\text{ м}$, $b = 3\text{ м}$ болса, арқалықтың тіректерінің реакциялары неге тең?

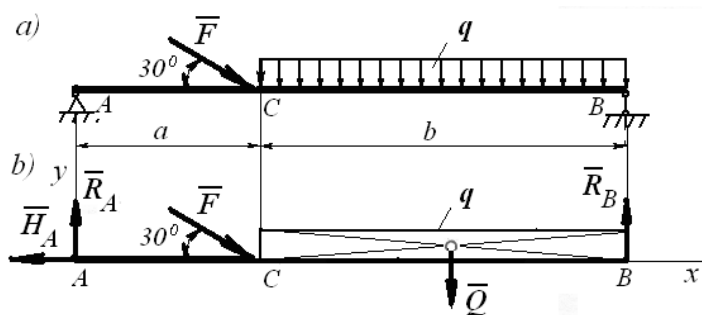
Шешуі: Босату ережесін пайдаланып, арқалықтың тіректерін алып тастап, оларды сәйкес реакциялармен алмастырып, берілген күштер мен тірек реакциялар әсеріндегі арқалықтың тепе-теңдігін қарастырамыз (4.8, b -сурет). Таралған күшті оған тең әсерлі \bar{Q} қадалған күшпен алмастырамыз. Оның шамасы $Q = qb = 2 \cdot 3 = 6\text{ кН}$.

Арқалықтың тепе-теңдік шарттарын жазамыз:

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad R_B \cdot (a + b) - Q \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) - F \cdot \sin 30^\circ \cdot a = 0,$$

$$\sum M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad R_A \cdot (a + b) - Q \cdot \left(\frac{b}{2}\right) - F \cdot \sin 30^\circ \cdot b = 0,$$

$$\sum F_{i,x} = 0; \quad -H_A + F \cdot \cos 30^\circ = 0.$$



4.8-сурет

Бірінші теңдеуден:

$$R_B = \frac{Q \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) + F \cdot \sin 30^\circ \cdot a}{a + b} = \frac{6 \cdot 3 + 6 \cdot 0,5 \cdot 1,5}{1,5 + 3} = 5\text{ Н}.$$

Екінші теңдеуден:

$$R_A = \frac{Q \cdot \left(\frac{b}{2}\right) + F \cdot \sin 30^\circ \cdot b}{a + b} = \frac{6 \cdot 1,5 + 6 \cdot 0,5 \cdot 3}{1,5 + 3} = 4H.$$

Үшінші теңдеуден:

$$H_A = F \cdot \cos 30^\circ = 6 \cdot 0,866 = 5,190H.$$

Анықталған реакция шамаларының дұрыстығын тексеру мақсатында, барлық күштердің y өсіне проекцияларын есептейміз:

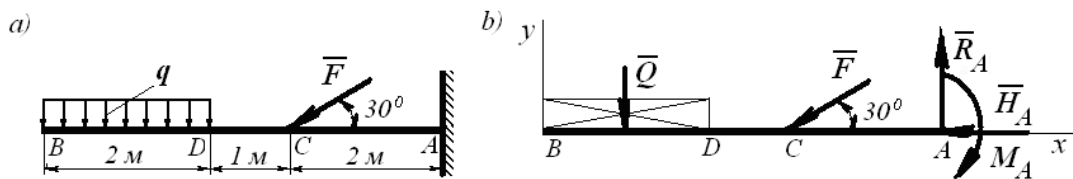
$$\sum F_{i,y} = 0; \quad R_A - Q - F \cdot \sin 30^\circ + R_B = 0.$$

Сан мәндерін қоямыз, сонда:

$$4 - 2 \cdot 3 - 6 \cdot 0,5 + 5 = 0.$$

Мұнан тірек реакцияларының дұрыс анықталғанын көреміз.

4.2-мысал. Егер таралған күштің қарқындығы $q = 200$ Н/м, арқалықтың өлшемдері $AC = BD = 2$ м, $CD = 1$ м болса, A қатаң тіректі момент 3700 Нм болатын F күшінің шамасын анықтаңыз (4.9, a -сурет).



4.9-сурет

Шешуі: BD аралығына әсер ететін таралған күшті осы аралықтың ортасына түсетін қадалған күшпен алмастырайық (4.9, b -сурет). Оның шамасы:

$$Q = q \cdot BD = 200 \cdot 2 = 400H.$$

Енді еркін орналасқан жазық күштер жиынының тепе-теңдік шартынан A қатаң тірекке қатысты тұрғызылатын күштердің моменттік теңдеуін қарастырайық:

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0; -M_A + Q\left(AD + \frac{BD}{2}\right) + F \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = 0.$$

Мұнан:

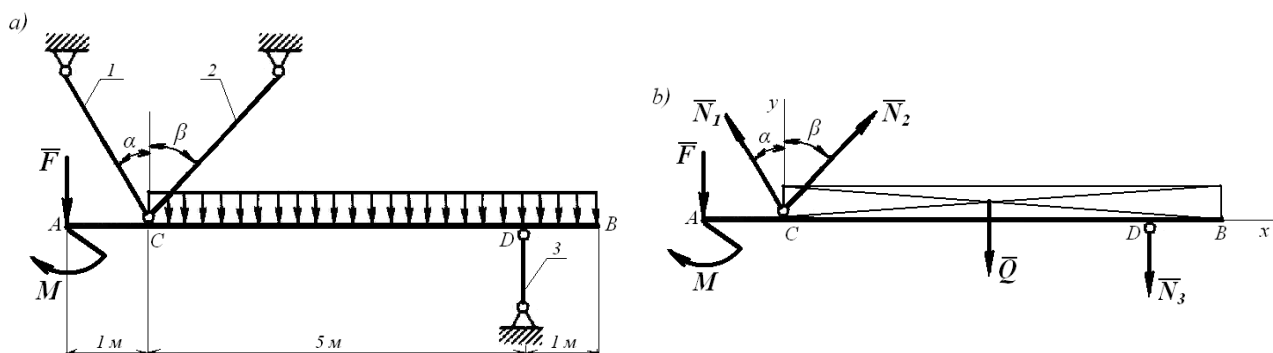
$$F = \frac{M_A - Q\left(AD + \frac{BD}{2}\right)}{AC} = \frac{3700 - 400 \cdot 4}{2} = 1050 \text{ Н}.$$

4.3-мысал. Суретте көрсетілгендей жүктелген, AB арқалығы ұштарында топсалы бекітпелері бар 1, 2, және 3-стерженьдерімен тепе-теңдік жағдайында ұстатылған (4.10, a -сурет). Стерженьдердің реакцияларын анықтаңыз.

$$F = 80 \text{ кН}, M = 50 \text{ кНм}, q = 20 \text{ кН/м}, \alpha = 30^\circ, \beta = 40^\circ.$$

Шешуі: AB арқалығына үш жүктеме түсірілген: A нүктесіне – \bar{F} күші және M моменті, ал $CB = 6 \text{ м}$ аралығына – қарқындығы q таралған күш, оны CB аралығының ортасына түскен қадалған күшпен алмастырамыз (4.10, b -сурет).

$$Q = q \cdot CB = 20 \cdot 6 = 120 \text{ кН}.$$



4.10-сурет

Топсалы бекітілген түзу стерженьдер тек созылатын немесе сығылатын болғандықтан, стерженьдердің реакциялары олардың бойымен бағытталған. Барлық стерженьдер созылады деп болжайық.

Стерженьдерді олардың \bar{N}_1, \bar{N}_2 және \bar{N}_3 реакцияларымен алмастырамыз (4.10, b-сурет).

Әдеттегідей, үш тепе-теңдік теңдеулерін түземіз:

$$\sum F_{i,x} = 0; \quad -N_1 \cdot \sin \alpha + N_2 \cdot \sin \beta = 0,$$

$$\sum F_{i,y} = 0; \quad -F + N_1 \cdot \cos \alpha + N_2 \cdot \cos \beta - Q - N_3 = 0,$$

$$\sum M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad -M + F \cdot AC - Q \cdot \frac{CB}{2} - N_3 \cdot CD = 0.$$

Төменгі теңдеуден:

$$N_3 = \frac{F \cdot AC - M - Q \cdot \frac{CB}{2}}{CD} = \frac{80 \cdot 1 - 50 - 120 \cdot 3}{5} = -66 \text{ кН}.$$

«Теріс» таңба 3-стерженьнің сығылатынын және \bar{N}_3 реакциясы жоғары бағыттталатынын аңғартады.

Алғашқы теңдеуден N_1 -ді N_2 -мен өрнектейік:

$$N_1 = N_2 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = N_2 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 1,286 N_2.$$

Бұл шаманы екінші теңдеуге қойып, одан N_2 -ні анықтаймыз:

$$-F + 1,286 \cdot N_2 \cdot \cos \alpha + N_2 \cdot \cos \beta - Q - N_3 = 0,$$

$$N_2 = \frac{F + Q + N_3}{1,286 \cdot \cos \alpha + \cos \beta} = \frac{80 + 120 - 66}{1,286 \cdot \cos 30^\circ + \cos 40^\circ} = 71,3 \text{ кН}.$$

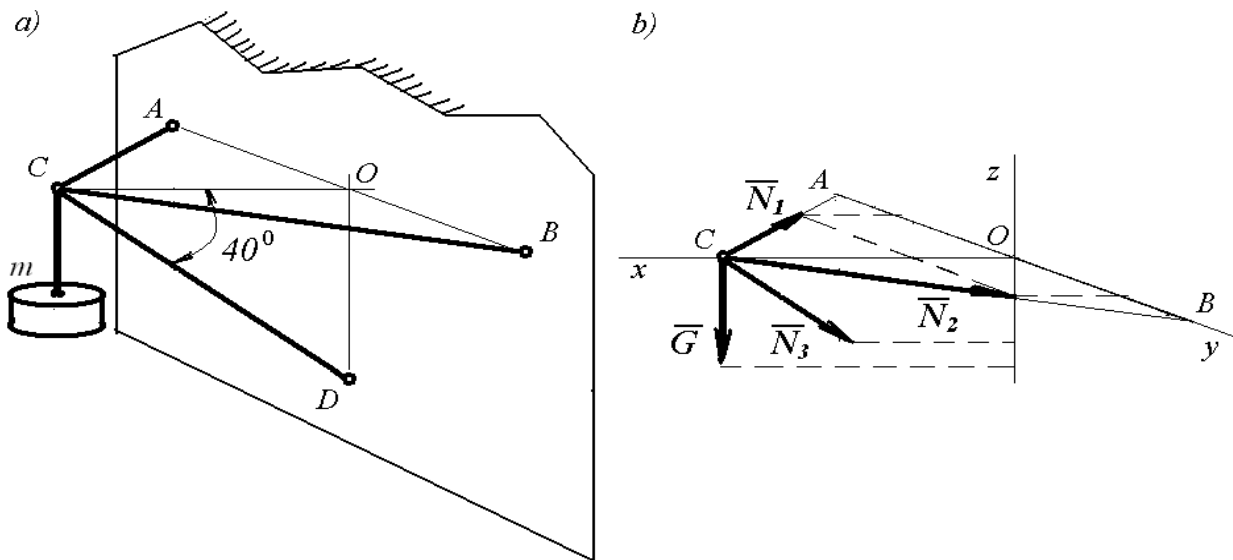
Олай болса,

$$N_1 = 1,286 N_2 = 1,286 \cdot 71,3 = 91,6 \text{ кН}.$$

Сонымен, 1 және 2-стержень созылады және олардың реакциялары $N_1 = 91,6 \text{ кН}$, $N_2 = 71,3 \text{ кН}$, 3-стержень сығылады, оның реакциясы $N_3 = 66 \text{ кН}$.

В) Кеңістіктегі күштер жүйесінің тепе-теңдігіне есептер шешу

4.4-мысал. Массасы $m = 500 \text{ кг}$ жүк, үш AC , CB және CD стерженьдерінен құрылған, $ABCD$ кронштейнге ілінген. Ұзындықтары бірдей AC , CB стерженьдері түйіскен жерінде тікбұрыш құрайды $\angle ACD = 90^\circ$ және горизонталь жазықтықта жатады. CD стержені горизонталь жазықтықпен 40° бұрыш құрайды (4.11-сурет). Жүктің әсерінен стерженьдерде пайда болатын күштерді анықтаңыз. Стерженьдер бір-бірімен және тік қабырғамен топсалы бекітілген.



4.11-сурет

Шешуі: Кронштейннің C нүктесіне жүк массасының салмағына тең тік жүктеме әсер етеді:

$$G = mg = 500 \cdot 9,81 = 4900 \text{ Н} = 4,9 \text{ кН}.$$

Жүктің кронштейнге әсері үш стерженьдегі реакциялармен теңестіріледі, яғни берілген денелер жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін, C нүктесі тепе-теңдікте болуы қажет. Байланыстарды босату принципін пайдаланып, C нүктесіндегі байланыстарды $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$ күштерімен алмастырамыз (4.11, b -сурет).

Сонда барлық күштер жүйесі:

$$(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{G}) \infty 0,$$

яғни тепе-теңдікте болады. Үш стерженьді созылады деп болжап, $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$ күштерін стерженьдердің бағытында C нүктесінен бастап жүргіземіз. Егер есептеу барысында ізделіп отырған белгісіздер шамасы « \rightarrow » таңбасымен анықталса, онда олардың шынайы бағыты қарама-қарсы бағытта болады.

Суретте көрсетілген координаттық өстер жүйесін жүргіземіз. x өсі ACB тікбұрышын қаққа бөледі ($\angle ACO = \angle BCO = 45^\circ$). Кеңістіктегі шоғырланған күштер жүйесінің үш тепе-теңдік теңдеуін түземіз:

$$\sum F_{i,x} = 0; \quad -N_1 \cdot \cos 45^\circ - N_2 \cos 45^\circ - N_3 \cos 40^\circ = 0;$$

$$\sum F_{i,y} = 0; \quad -N_1 \cdot \sin 45^\circ + N_2 \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{i,z} = 0; \quad -N_3 \cdot \sin 40^\circ - G = 0.$$

Тұрғызылған теңдеулер жүйесін шешеміз. Үшінші теңдеуден:

$$N_3 = -\frac{G}{\sin 40^\circ} = -\frac{4,9}{\sin 40^\circ} = -7,62 \text{ кН}.$$

« \rightarrow » таңбасы N_3 реакциясының бағыты суретте көрсетілгенге қарама-қарсы екенін көрсетеді, яғни CD стержені $7,62 \text{ кН}$ күшпен сығылады.

Екінші теңдеуден AC, CB стержендерінің шамалары тең екенін аламыз:

$$N_1 = N_2.$$

Бірінші теңдеуден:

$$N_1 = N_2 = -\frac{N_3 \cos 40^\circ}{2 \cos 45^\circ} = \frac{7,62 \cdot \cos 40^\circ}{2 \cos 45^\circ} = 4,13 \text{ кН}.$$

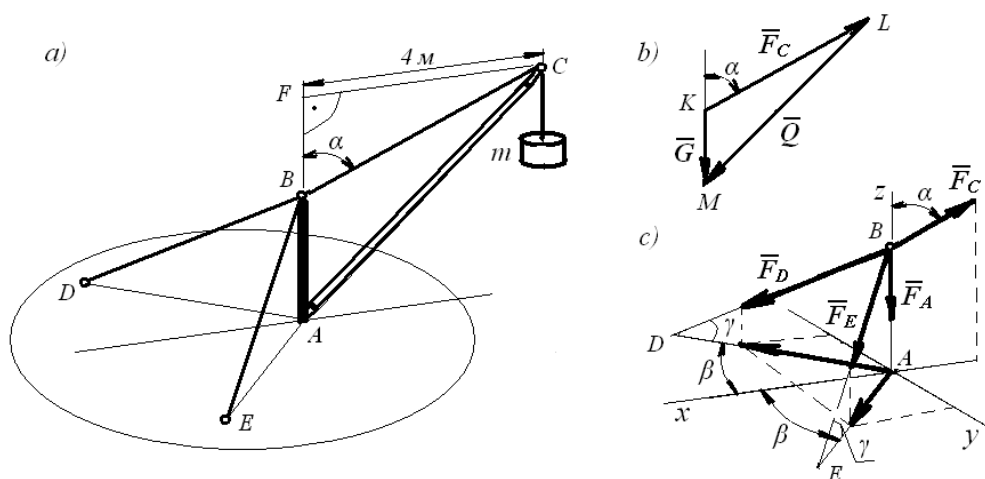
N_1 және N_2 реакцияларының сан мәндері оң таңбамен шықты, бұл AC және CB стерженьдерінің $4,13 \text{ кН}$ күшпен созылатынын аңғартады.

4.5-мысал. Массасы $m = 2000 \text{ кг}$ жүк көтеретін жылжымалы кран 4.12, a -суретте көрсетілгендей құрылған. $AB = AD = AE = 2 \text{ м}$; $\angle DAE = 120^\circ$. Кранның AC жебесі орналасқан ABC жазықтығы екіжақты DAE бұрышын қаққа бөледі. Тік AB бағанасын қысатын және BD мен BE арқандарын созушы күштерді анықтаңыз.

Шешуі: Есепте BC тартпасымен байланыстырылған жебе мен бағанадан тұратын денелер жиынының тепе-теңдігі қарастырылады. Арқан мен бағанада пайда болатын күштерді анықтамас бұрын, BC тартпасының керілу күшін анықтау қажет.

C нүктесіне жүк массасының салмағына тең тік жүктеме әсер етеді:

$$G = mg = 2000 \cdot 9,81 = 19600 \text{ Н} = 19,6 \text{ кН}.$$



4.12-сурет

Үшбұрыш ережесін пайдаланып, G жүгін BC тартпасымен және AB бағанасы бойымен бағытталған екі құраушы күштерге жіктейміз. Ол үшін кез келген K нүктесінен \bar{G} тұрғызамыз, ал сонан кейін оның ұштарынан BC мен AB параллель сызықтар жүргіземіз. Тұрғызылған үшбұрышта KL қабырғасы BC тартпасын созушы \bar{F}_C күшін, ал LM қабырғасы AC жебесін сығушы \bar{F}_C күшін кескіндейді (4.12, b -сурет).

$$KLM \text{ және } BSA \text{ үшбұрыштарының ұқсастығынан } \frac{F_C}{G} = \frac{BC}{BA}.$$

$$\text{Олай болса, } F_C = G \cdot \frac{BC}{BA}.$$

Есептің шарты бойынша белгісіз BC тартпасының ұзындығын оңай анықтауға болады, ол үшін BCF үшбұрышын қарастыру жеткілікті (4.12, a -сурет) $BC = \frac{CF}{\sin \alpha}$.

Сонымен,

$$F_C = G \cdot \frac{CF}{BA \cdot \sin \alpha} = 19,6 \cdot \frac{4}{2 \cdot \sin 60^\circ} = 45,3 \text{ кН}.$$

\bar{F}_C күшін әсер сызығы бойынша C нүктесінен B нүктесіне түсіріп, B нүктесінің тепе-теңдігін қарастырамыз. Бұл нүктеге $F_{BC} = 45,3 \text{ кН}$ күшімен қатар үш байланыстың реакциялары әсер етеді: \bar{F}_A – бағана реакциясы, \bar{F}_D мен \bar{F}_E – BD мен BE арқандарының реакциялары. Жалпы ережеге сүйеніп, барлық байланыс реакцияларын созылған деп аламыз (4.12, c -сурет).

BAE және BAD үшбұрыштарының катеттері өзара тең $AB = AD = AE$, олай болса, $\angle BDA = \angle DBA = \angle BEA = \angle EBA = \gamma = 45^\circ$ және $\angle DAE$ бұрышы x өсімен екіге бөлінген $\beta = 45^\circ$.

Координаттар жүйесінің өстерін 4.12, c -суретте көрсетілгендей орналастырып, үш тепе-теңдік теңдеуін тұрғызамыз:

$$\sum F_{i,x} = 0; \quad F_E \cos 45^\circ \cos 60^\circ + F_D \cos 45^\circ \cos 60^\circ - F_C \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{i,y} = 0; \quad F_E \cos 45^\circ \sin 60^\circ - F_D \cos 45^\circ \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{i,z} = 0; \quad -F_E \sin 45^\circ - F_D \sin 45^\circ - F_A + F_C \cos 60^\circ = 0.$$

Екінші теңдеуден:

$$F_E = F_D.$$

Олай болса, бірінші және үшінші теңдеулерді келесі екі теңдеу жүйесіне келтіреміз:

$$\begin{cases} 2F_E \cos 45^\circ \cos 60^\circ - F_C \sin 60^\circ = 0; \\ -2F_E \sin 45^\circ - F_A + F_C \cos 60^\circ = 0. \end{cases}$$

Төменгі теңдеуді $\cos 60^\circ$ көбейтіп, оны үстіңгі теңдеумен қосамыз:

$$F_C \sin 60^\circ - F_A \cos 60^\circ + F_C \cos^2 60^\circ = 0.$$

Мұнан

$$F_A = \frac{F_C (\cos^2 60^\circ - \sin 60^\circ)}{\cos 60^\circ} = \frac{45,3 \cdot (\cos^2 60^\circ - \sin 60^\circ)}{\cos 60^\circ} = 45,3 \cdot (\cos 60^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ),$$

$$F_A = -55,8 \text{ кН}.$$

« \leftarrow » таңбасы F_A реакциясының B түйініне бағытталғанын білдіреді, яғни BA бағанасы $55,8 \text{ кН}$ күшпен сығылады.

Анықталған $F_A = -55,8 \text{ кН}$ мен $F_C = 45,3 \text{ кН}$ шамаларын жоғарғы теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуіне қойып, ізденді F_E және F_D реакцияларын анықтаймыз:

$$F_E = F_D = \frac{F_C \cos 60^\circ - F_{BA}}{2 \sin 45^\circ} = \frac{45,3 \cdot \cos 60^\circ + 55,8}{2 \sin 45^\circ},$$

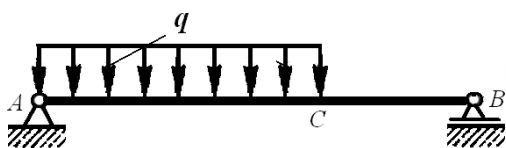
мұнан

$$F_E = F_D = 55,4 \text{ кН}.$$

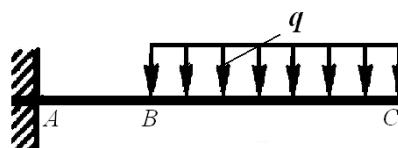
BD мен BE тростары $55,4 \text{ кН}$ күштермен созылады.

Жаттығу есептері

1-есеп. Екі топсалы тіректе жатқан арқалық қарқындығы $q = 5 \text{ кН/м}$ таралған күшпен жүктелген (1-сурет). Тіректердің реакцияларын анықтаңыз. $AC = 6 \text{ м}$, $CB = 3 \text{ м}$.



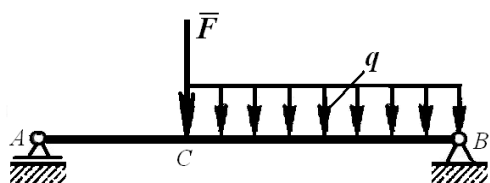
1-сурет



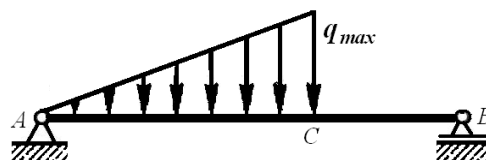
2-сурет

2-есеп. Бір ұшы қатаң бекітілген арқалық қарқындығы $q = 25 \text{ кН/м}$ таралған күшпен жүктелген (2-сурет). Қатаң тіректің реакцияларын анықтаңыз. $AB = 2 \text{ м}$, $BC = 4 \text{ м}$.

3-есеп. AB арқалығы қадалған $F = 9 \text{ Н}$ күшімен және қарқындығы $q = 3 \text{ кН/м}$ таралған күшпен жүктелген (3-сурет). Тіректердің реакцияларын анықтаңыз. $AB = 5 \text{ м}$, $BC = 2 \text{ м}$.



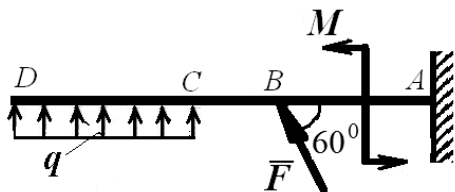
3-сурет



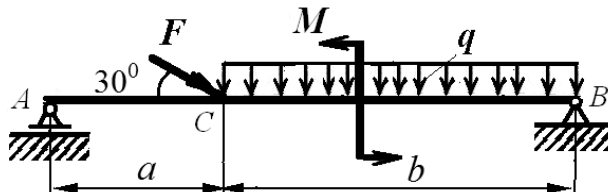
4-сурет

4-есеп. Суретте көрсетілген (4-сурет) таралған күштің қарқындығы $q_{max} = 120 \text{ кН/м}$ болса, арқалықтың тірек реакциялары неге тең? $AB = 4,5 \text{ м}$, $BC = 1,5 \text{ м}$.

5-есеп. Қатаң тіректі арқалық қадалған $F = 173 \text{ Н}$ күшімен, қадалған $M = 42 \text{ Нм}$ моментпен және қарқындығы $q = 36 \text{ Н/м}$ таралған күшпен жүктелген (5-сурет). Тіректің реакцияларын анықтаңыз. $AB = CD = 2 \text{ м}$, $BC = 1 \text{ м}$.



5-сурет



6-сурет

6-есеп. Топсалы қос тіректі арқалық қадалған $F = 150 \text{ Н}$ күшімен, қадалған $M = 50 \text{ Нм}$ моментпен және қарқындығы $q = 40 \text{ Н/м}$ таралған күшпен жүктелген (6-сурет). Тіректің реакцияларын анықтаңыз. $AC = 2 \text{ м}$, $BC = 6 \text{ м}$.

Қайталау сұрақтары:

1. Параллель күштер жиыны дегеніміз не?
2. Бір жаққа бағытталған екі параллель күштің әр уақытта тең әсері болатыны қай формуладан шығады?
3. Қарама-қарсы бағытталған екі параллель күштің қандай жағдайда тең әсері болады? Ол қайда түсіріледі?
4. Күшті өзіне параллель көшіргеннен денеге әсері қандай жағдайда өзгермейді?
5. Параллель күштер орталығы дегеніміз не? Параллель күштер орталығының координаттары қалай анықталады?
6. Параллель күштер жиыны қандай қарапайым түрлерге келтіріледі?
7. Бір күшті қандай қарапайым құраушы күштерге жіктеуге болады?
8. Қарапайым күштер жиындарының денеге жасайтын әсерін анықтайтын шамаларды атаңыз.
9. Күшті параллель орын ауыстырғанда ол қалай түрленеді?
10. Қосымша қос күш деген не? Оның векторлық сипаттамасы қандай?
11. Еркін жазық күштер жиыны деген не?
12. Еркін жазық күштер жиынының бас векторы мен бас моментін қалай табуға болады?
13. Еркін жазық күштер жиынының денеге әсерінің айырмашылықтары немесе эквиваленттігі неде?
14. Жазық күштер жиынының бас векторы қандай жағдайда оның тең әсері болады?
15. Жазық күштер жиынының қандай жағдайда тең әсері болмайды?
16. Жазық күштер жиынының тепе-теңдігінің векторлық шарты қалайша жазылады?
17. Бас вектормен басмоменттің сипаттамаларын алып, қажетті өрнектерді жазып көрсетіңіз.
18. Жазық күштер жиынының бас векторымен тең әсері арасында айырмашылық бар ма?
19. Жазық күштер жиынының келтіру центрін өзгерткеннен оның бас моменті өзгере ме?
20. Тепе-теңдік шартының түрлерін атаңыз.
21. Күштердің дербес түрлерін атап, олардың тепе-теңдікте болу шарттарын жазып көрсетіңіз.

22. Бір жазықтықта орналасқан еркін күштер жиынының тепе-теңдік шарттарының үш түрін жазып көрсетіңіз.
23. Статика әдісімен шешілмейтін есептерге мысал келтіріңіз.
24. Күштер тепе-теңдігінің шарттары және еркін емес дене тепе-теңдігінің шарттарының айырмашылығы неде?
25. Кеңістіктегі кез келген жинақталған күштер жиынының аналитикалық тепе-теңдік шарттары қандай?
26. Кезкелген күштер жиынының әсерінен дене тепе-тең қалыпта болуы үшін қандай шарттар орындалуы керек?
27. Кеңістіктегі кез келген жинақталған күштер жиынының аналитикалық тепе-теңдік шарттары қандай?

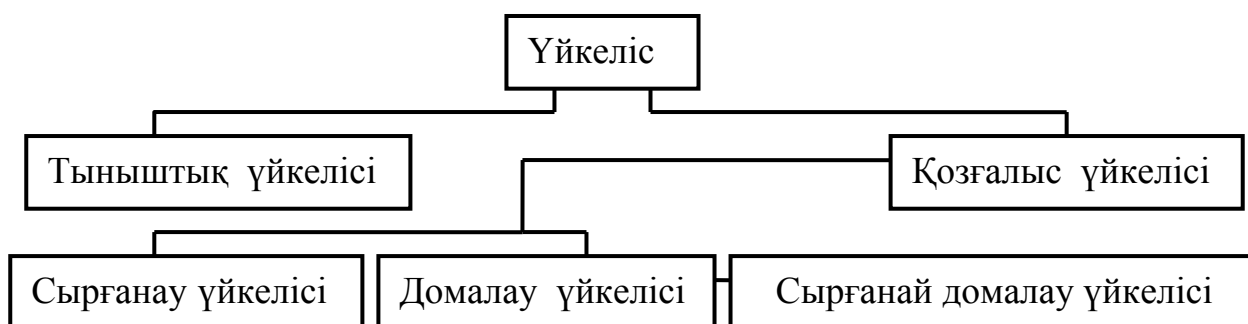
5-тарау. ҮЙКЕЛІС

5.1. Үйкеліс туралы ұғым

Табиғатта абсолют жылтыр және абсолют қатты денелер болмайды, сондықтан бір денені екінші дене бетімен жылжытқанда **үйкеліс** деп аталатын кедергі туындайды. **Үйкеліс** – екі дененің жанасу беттерінің аймағында оларға жанана туындайтын жылжуға қатысты кедергі құбылысы.

Үйкеліс – табиғатта кең тараған және үлкен маңызы бар құбылыс. Таспалы және фрикционды берілістердің, тежегіш жабдықтардың, көлбеу транспортердің және т.б. жұмыс жасауы үйкеліске негізделген. Үйкеліс жермен байланысты, сонымен, автомобильдердің, тракторлардың және басқа да көліктердің жұмыс жасауын қамтамасыз етеді. Сонымен қатар көптеген жағдайда үйкеліс залалды кедергі, одан арылу үшін елеулі энергия жұмсау қажет. Бұл жұмсалатын пайдасыз энергия және оны азайтуға ұмтылады.

Қозғалыстың болуы және сипатына қатысты үйкелісті былайша топтастыруға болады.



Тыныштық үйкелісі деп екі дененің алдын ала жылжығандағы, яғни тыныштықтан салыстырмалы қозғалысқа ауысқанға дейінгі денелердің салыстырмалы аз-маз жылжуындағы үйкелісті айтады.

Қозғалыс үйкелісі дегеніміз – денелердің салыстырмалы қозғалысындағы үйкеліс.

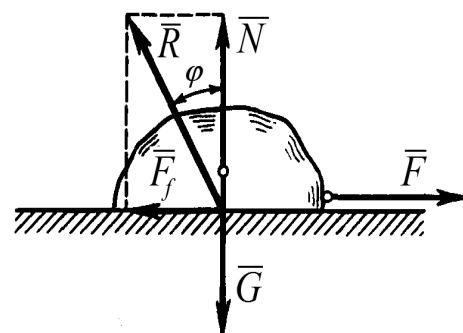
Ары қарай салыстырмалы қозғалыстың болуы мен сипатына қатысты үйкелісті қарастырамыз.

5.2. Сырғанау үйкелісі

Сырғанау үйкелісі дегеніміз – жанасушы денелердің түйісу нүктесіндегі жылдамдықтары әртүрлі болатын қозғалыс үйкелісі. Сырғанау үйкелісі, тыныштық үйкелісі тәрізді, дене беттерінің кедір-бұдырлығы мен деформациялануына, ал сонымен қатар бір-біріне қысылған денелерде молекулярлық іліністің болуына байланысты. Сырғанау үйкелісіне денелердің тозуы еріп жүреді, яғни материалдың бөлінуі және қалдық деформациялануы, ал сонымен бірге денелердің үйкеліс беттерінің қызуы. Үйкеліс күшімен сипатталады.

Үйкеліс күші – үйкелістегі екі дененің салыстырмалы жылжуында туындайтын кедергі күші.

Кедір-бұдыр жазықтықта жатқан денені қарастырайық (5.1-сурет). Дененің \vec{G} салмағы \vec{N} нормаль реакциясымен теңестіріледі. Егер денеге жылжытушы азмаз \vec{F} күшін түсірсек, ол денені қозғалысқа келтіре алмайды, өйткені оны үйкеліс күші \vec{F}_f теңестіреді. Үйкеліс күші – тірек жазықтығының реакциясы болатын, жазықтық бойымен бағытталған күш.



5.1-сурет

Егер жылжытушы күш \vec{F} шамасын біртіндеп өсіретін болсақ, онда оның қандай да бір мәніне дейін дене тыныштық күйінде қала береді, ал одан әрі \vec{F} -ті өсірсек дене қозғалысқа келеді.

Бұдан тыныштық күйдегі үйкеліс күші алдын ала жылжыту дәрежесіне қатысты нөлден қандай да бір F_f^{\max} максималь мәніне дейін өзгертіні байқалады, және үйкеліс күшінің модулі қашанда жылжытушы күшке тең.

$$|F_f^{\max}| = |F|. \quad (5.1)$$

Салыстырмалы қозғалысқа дейінгі үйкеліс күшін *толық емес үйкеліс күші* деп аталады.

Салыстырмалы қозғалыс мезетіндегі тыныштық үйкеліс күшінің максимал шамасы ең үлкен тыныштық үйкеліс күші немесе тыныштық үйкеліс күші деп аталады.

XVIII ғасырда француз ғалымы Амонтон, ал сонан кейін Кулон үйкеліс саласына зерттеулер жүргізді және солардың негізінде сырғанау үйкелісінің негізгі үш заңын тұжырымдады, әдетте, Кулон заңы деп атайды:

1. *Үйкеліс күші үйкелетін беттердің ауданы шамасына тәуелсіз.*

2. *Сырғанау үйкеліс күшінің максимум мәні денелердің бетіне әсер ететін сыртқы күштердің \bar{N} нормаль құраушысына тура пропорционал.*

3. *Үйкеліс күші дене материалына, үйкелісетін беттердің жағдайына, майлаудың болуына және тегіне тәуелді.*

Үйкеліс күштердің дененің бетіне әсер ететін сыртқы күштердің нормаль құрамасына қатынасы сырғанау үйкеліс коэффициенті деп аталады, ол f деп белгіленеді.

Сонымен,

$$f = \frac{F_f}{N} \text{ немесе } F_f = f \cdot N. \quad (5.2)$$

Нәтижесінде, екінші заңды былайша оқуға болады: *үйкеліс күші сырғанау үйкеліс коэффициентінің нормаль қысым күшіне немесе реакцияға көбейткенге тең.*

Сырғанау үйкелісінің коэффициенті f , үйкелісетін денелердің материалдарына және олардың беттерінің өңделу дәрежесіне, температурасына, майлануына тәуелді болып келеді. Сонымен қатар ол дененің салыстырмалы жылдамдығына да тәуелді.

Тіреуші беттердің (жанасушы беттердің) \bar{N} нормаль реакциясы мен \bar{F}_f үйкеліс күшінің, тіреуші беттердің **толық реакциясы** деп аталатын, тең әсерлі күші \bar{R} болады (5.1-сурет):

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_f. \quad (5.3)$$

Толық реакция \bar{R} тіреуші беттерге түсірілген ортақ нормалімен қандай да бір бұрыш жасай әсер етеді. Осы бұрыштың максимум мәні **үйкеліс бұрышы** деп аталады және φ деп белгіленеді. 5.1-суретінен

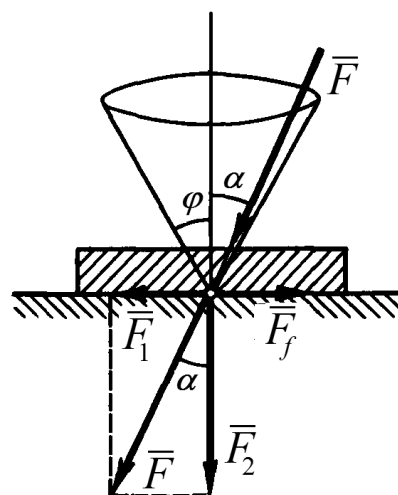
$$F_f = N \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (5.4)$$

формуласын аламыз. (5.2) және (5.4) теңдіктерін салыстырып,

$$f = \operatorname{tg} \varphi$$

аламыз, яғни сырғанау үйкеліс коэффициенті үйкеліс бұрышының тангенсіне тең.

Егер қозғалыстың барлық бағыттары үшін сырғанау үйкеліс коэффициенті бірдей болса, онда толық реакцияның геометриялық орны, **үйкеліс конусы** деп аталатын, төбесі денелердің түйісу нүктесінде жататын дөңгелек конустық бетті береді (5.2-сурет). Егер қозғалыстың әртүрлі бағыты үшін сырғанау үйкеліс коэффициенті бірдей болмаса, конустық бет дөңгелек болмайды.



5.2-сурет

Үйкеліс конусы дененің тыныштық күйіндегі толық реакциялардың мүмкін болатын орындарының барлығын да шектеп тұрады.

Шын мәнінде, егер денеге түсірілген актив күштердің \bar{F} тең әсер күшін құраушы \bar{F}_1 (қозғаушы күш) және \bar{F}_2 (нормаль қысу күші) күштеріне жіктесек,

$$F_1 = F_2 \operatorname{tg} \alpha .$$

Сырғанау үйкелісінің екінші заңы бойынша

$$F_f = f \cdot F_2 = F_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi .$$

Демек, $\alpha \leq \varphi$ болғанда $F_1 \leq F_f$ болады, яғни дене тыныштық күйде болады.

$$\alpha \leq \varphi \quad (5.5)$$

қатынасы, **дененің тыныштықта болу шарты** деп аталады.

Сөйтіп, дене тепе-теңдікте қалуы үшін актив күштердің тең әсер күші \bar{F} үйкеліс конусының ішінде жатуы қарек.

Егер \bar{F} күші конус жасаушысының бойымен бағытталса, онда $\alpha = \varphi$. Бұл жағдайда дене тепе-теңдіктің шекті жағдайында болады.

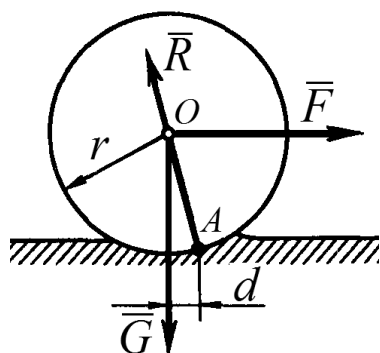
\bar{F} күші үйкеліс конусының сырт жақта жатса, дене тыныштық күйін сақтай алмай қозғалысқа келеді.

Демек, үйкеліс конусы дененің тепе-теңдік ауданын анықтайды.

Сырғанау үйкеліс коэффициенті тәжірибелік жолмен анықталады және оның мәндері арнаулы анықтамаларда келтіріледі.

5.3. Домалау үйкелісі

Домалау үйкелісі деп бір дененің екінші бір дене бетімен домалаған кезде пайда болатын қозғалыс үйкелісін айтады. Бұл жағдайда жанасушы денелердің түйісу нүктесіндегі жылдамдықтардың бағыттары мен шамалары бірдей болады. Егер екі жанасушы дене сырғанай және домалай қозғалса, *сырғанай домалу үйкелісі* туындайды.



5.3-сурет

Салмағы G және радиусы \bar{r} цилиндр горизонталь кедір-бұдыр жазықтық бетімен сырғанаусыз домаласын (5.3-сурет). G күшінің қысымынан цилиндр мен тіреуші бет олардың жанасу нүктесінде деформацияланады. Егер \bar{F} күші әсер етпесе, онда \bar{G} жанасушы беттегі реакциямен \bar{R} теңестіріледі, яғни цилиндр тыныштық күйде болады (\bar{R} реакциясы вертикаль бағытталады).

Егер цилиндрге үлкен емес \bar{F} күшін түсірсек те, дене тыныштық күйде болады. Сонда тіреуші бетіндегі қысым күшінің қайта үлесуі туындайды және толық реакцияның \bar{R} түсу нүктесі A нүктесіне ауысып, әсер сызығы цилиндрдің центрінен O өтеді. \bar{F} күшінің әсерінен цилиндрдің тіреуші бетпен түйісу нүктесі d қашықтыққа жылжиды, яғни A нүктесіне келеді.

\bar{F} күшінің қандай да бір дағдарыс мәнінде цилиндр қозғалысқа келеді және тіреуші жазықтықта бірқалыпты, ал A нүктесі оң жақтағы шеткі орынға домалайды. Мұнан тыныштық күйдегі домалау үйкелісі нөлден қандай да бір максимум мәнге дейін өзгертетінін аңғаруға болады. Домалау үйкелісінің максимум мәні қозғалыстың басталу

мезетіне сәйкес келеді. Сонда цилиндрдің бірқалыпты домалаған жағдайында (яғни тепе-теңдікте)

$$\Sigma M_A = 0; \quad -F \cdot r + G \cdot d = 0.$$

Денелердің деформациясы мейлінше аз болғандықтан, \bar{F} күшінің иінін цилиндрдің радиусына тең деп алынған.

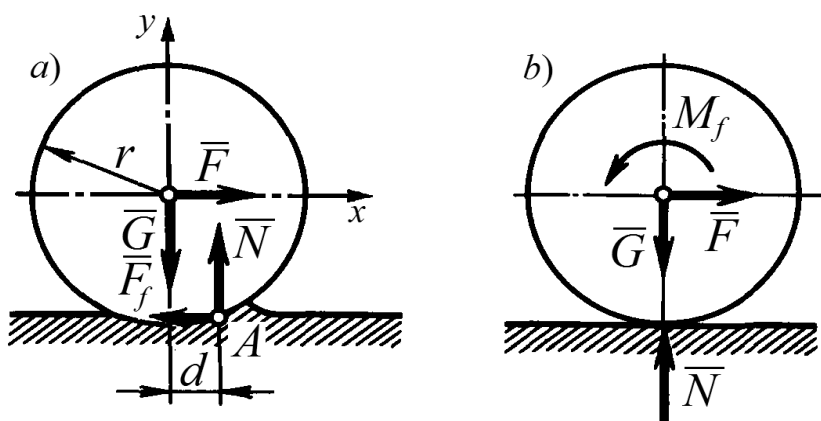
Соңғы теңдіктен цилиндрдің бірқалыпты домалауына қажетті күшті анықтаймыз:

$$F = \frac{dG}{r}.$$

d иінінің максималь мәнін *домалау үйкелісінің коэффициенті* деп аталады.

Алынған өрнектен көрініп тұрғандай, цилиндрді бірқалыпты домалатуға қажетті күштің шамасы цилиндрдің салмағына тура пропорционал да, оның радиусына кері пропорционал.

Домалау үйкеліс коэффициенті тәжірибелік жолмен анықталады және оның мәндері арнаулы анықтамаларда келтіріледі. Іс жүзінде домалау үйкеліс коэффициенті дененің қозғалыс жылдамдығына тәуелсіз.



5.4-сурет

Бірқатар жағдайда домалау үйкелісін зерттегенде, цилиндрге әсер ететін актив және пассив күштерді басқа түрді көрсеткен ыңғайлы (5.4-сурет).

Тежеуіш бетің \bar{R} толық реакциясын \bar{N} және \bar{F}_f құраушы күштерге жіктейік, онда

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_f,$$

мұндағы \bar{F}_f – домалау үйкеліс күші; \bar{N} – тіреуші бетке нормаль реакция.

Цилиндрге әсер етіп тұрған күштер жүйесінің тепе-теңдігінің шарттарын жазайық:

$$\Sigma X = 0; F - F_f = 0, \quad \Sigma Y = 0; N - G = 0, \quad \Sigma M_A = 0; -F \cdot r + G \cdot d = 0.$$

Бұл теңдеуден

$$F = F_f, \quad N = G, \quad F \cdot r = G \cdot d$$

екенін анықтаймыз.

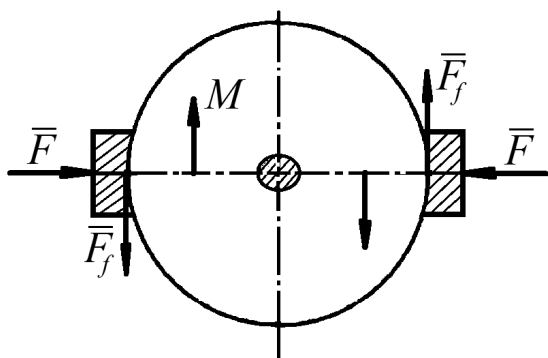
$F \cdot r = M$ және $G \cdot d = M_f$ деп белгілеуді енгізіп, M – сырғанау моменті, M_f – үйкеліс моменті деп атайық.

Цилиндрдің келесідей дербес қозғалыс жағдайлары болуы мүмкін:

- $M \geq M_f$, $F < F_f$ болса, тек домалау;
- $M < M_f$, $F > F_f$ болса, тек сырғанау;
- $M > M_f$, $F > F_f$ болса, сырғанай домалау;
- $M < M_f$, $F < F_f$ болса, тыныштық күйде.

Көптеген жағдайда домалау үйкелісінің шамасы сырғанау үйкелісіне қатысты аздай, сондықтан сырғанау подшипниктарының орнына шарикті және роликті подшипниктер кеңінен қолданылады.

5.4. Есептерді шешудің әдістемесі



5.5-сурет

Үйкелісі бар статиканың есептерін шешудің әдісі, үйкелісі болмайтыннан ешқандай ерекшелігі жоқ және тепе-теңдік теңдеулерінде, әдетте, үйкеліс күшінің максималь мәні енгізіледі.

5.1-мысал. Білікке моменті $M = 100 \text{ Нм}$ қос күш түсірілген және радиусы $r = 0.25 \text{ м}$ тежегіш дөңге-

лек сыналанып отырғызылған (5.5-сурет). Дөңгелекті қарама-қарсы бағытта екі тежеуіш колодкалары $F = 900 \text{ Н}$ күшімен қысылған. Дөңгелек тыныштық күйде болғанда, дөңгелек пен колодкалардың арасындағы үйкеліс коэффициентін анықтаңыз.

Шешуі: Тежеуші дөңгелек тыныштық күйде болуы үшін, оған әсер ететін M қос күш моменті, дөңгелек пен колодкалардың арасындағы қос күш үйкеліс күштерінің моменттерімен теңгеріліп тұруы қажет, сондықтан

$$M = F_f d .$$

Дөңгелек пен колодкалардың арасындағы үйкеліс күшінің максималы шамасы

$$F_f = f \cdot F .$$

Осы үйкеліс күшінің шамасын алдыңғы қатынасқа енгізсек,

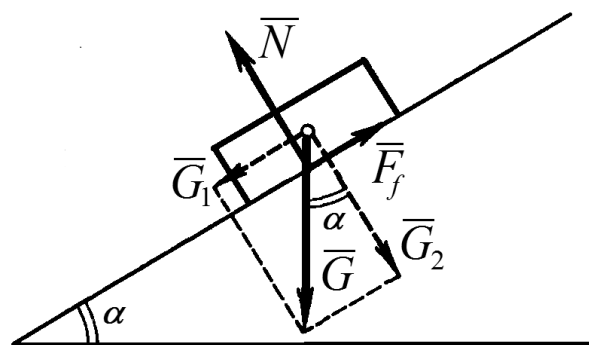
$$M = f \cdot F \cdot d .$$

Бұдан ізделіп отырған үйкеліс коэффициенті

$$f = \frac{M}{F \cdot d} = \frac{100}{900 \cdot 0,5} = 0,22 .$$

5.2-мысал. Горизонталь жазықтықпен $\alpha = 30^\circ$ бұрыш құратын кедір-бұдыр көлбеу жазықтыққа салмағы $G = 560 \text{ Н}$ дене түсірілген. Дене мен көлбеу жазықтық арасындағы үйкеліс күші мен көлбеу жазықтықтың реакциясын анықтаңыз.

Шешуі: \bar{G} күшін көлбеу жазықтыққа параллель және перпендикуляр \bar{G}_1 және \bar{G}_2 құраушыларға жіктейік. Осы күштердің модульдерін келесі формулалардан анықтаймыз



5.6-сурет

$$G_1 = G \cdot \sin \alpha = 560 \cdot \sin 30^\circ = 280 \text{ Н} ;$$

$$G_2 = G \cdot \cos \alpha = 560 \cdot \cos 30^\circ = 484,96 \text{ Н}.$$

\overline{G}_2 күші көлбеу жазықтықтың \overline{N} реакциясымен теңгеріледі. Сонымен,

$$G_2 = N = 484,96 \text{ Н}.$$

\overline{G}_1 күші денені көлбеу жазықтық бетімен жылжытуға ұмтылады. Дене тепе-теңдікте тұрғандықтан, ол күш үйкеліс күшімен теңестіріледі. Сырғанау үйкелісінің екінші заңына сәйкес, оның максимум мәні

$$F_f = f \cdot N = 0,25 \cdot 484,96 = 121,24 \text{ Н} .$$

5.3-мысал. Салмақ күші $\overline{G}=150 \text{ Н}$ жүкті көтеретін, радиусы $R = 0,25 \text{ м}$ барабан білігіне колодкалық тежегіш орнатылған (5.7-сурет). Тежегіш барабанның радиусы $r = 0,15 \text{ м}$. Жүкті ұстап тұруға қажетті колодканы қысатын күштің минимум мәнін анықтаңыз. Колодканың тежегіш барабанмен үйкеліс коэффициенті $f = 0,3$.

Шешуі: Барабанның тепе-теңдік теңдеуін түземіз

$$\Sigma M_o = 0; \quad GR - 2F_f r = 0,$$

мұнда F_f – колодканың тежегіш барабанмен үйкеліс күші.

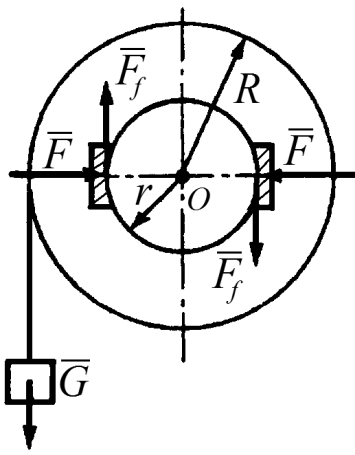
Колодканы қысатын күш Кулон заңы бойынша үйкеліс күшіне тәуелді: $F_f = f \cdot F$. Жазылған теңдеулерді бірге шеше отырып,

$$F_{\min} = \frac{GR}{2f \cdot r} = \frac{150 \cdot 0,25}{2 \cdot 0,3 \cdot 0,15} = 416,7 \text{ Н}.$$

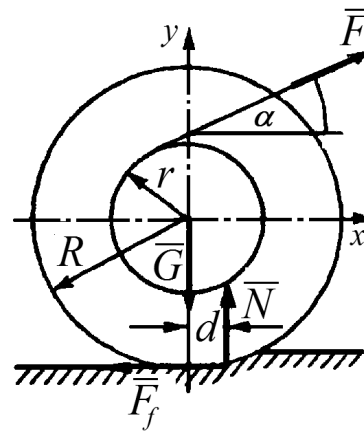
Сонымен, барабанның тепе-теңдігі колодканы қысатын күштің шамасы

$$F \geq 416,7 \text{ Н}$$

шартын қанағаттандырса ғана орын алады.



5.7-сурет



5.8-сурет

5.4-мысал. Салмақ күші \bar{G} , радиусы R , цилиндрлік каток, оның радиусы r барабанына оралған арқанға түсірілген күшпен қозғалысқа келтіріледі (5.8-сурет). Арқанның барабаннан шығу бұрышы $\alpha = 45^\circ$, домалау үйкеліс коэффициенті $d = 0,005 \text{ м}$, катоктың тіреуіш бетімен үйкеліс коэффициенті $f = 0,25$, каток радиусы $R = 0,3 \text{ м}$, барабан радиусы $r = 0,15 \text{ м}$, катоктың салмағы $G = 300 \text{ Н}$. Катокты бірқалыпты сырғанаусыз домалатуға қажетті нормаль реакцияны N , үйкеліс күшін, F_f және F күшін анықтаңыз.

Шешуі: Катокты қозғалыс жазықтығының байланыстарынан босатып, оның катокқа әсерін қозғалыс бағытында домалау коэффициентінің d шамасына жылжыған, нормаль реакция \bar{N} және горизонталь реакция \bar{F}_{in} түрінде көрсетейік. Актив \bar{G} және \bar{F} күштерінің, ал сонымен қатар \bar{N} және F_f байланыс реакцияларының әсеріндегі катоктың тепе-теңдігін қарастырайық. Катоктың тепе-теңдік теңдеуін күштердің 5.8-суретте көрсетілген өстерге проекцияларымен құрамыз. Катоктың центріне O қатысты моменттердің теңдеуін тұрғызамыз.

$$\sum X = 0; \quad F \cos \alpha - F_f = 0,$$

$$\sum Y = 0; \quad N + F \sin \alpha - G = 0,$$

$$\sum M_O = 0; \quad F_f \cdot R + F \cdot r - N \cdot d = 0.$$

Теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуінен \bar{F}_{in} табамыз және оны үшінші теңдеуге қоямыз.

$$F(r + R \cos \alpha) - N \cdot d = 0$$

теңдігін аламыз.

Теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуінен N -ді өрнектеп, алдыңғы теңдеуге қоямыз, сонда

$$N + F \sin \alpha - G = 0,$$

$$F(r + R \cos \alpha) - (G - F \sin \alpha) \cdot d = 0.$$

Күшті анықтаймыз:

$$F = G \frac{d}{r + R \cos \alpha + d \sin \alpha}.$$

F -тің мәнін жүйенің бірінші теңдеуіне қойып, ілініс күшін есептейміз:

$$F_f = G \frac{d \cos \alpha}{r + R \cos \alpha + d \sin \alpha}.$$

Теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуінен алынған N -нің өрнегін ескеріп, оның мәнін табамыз:

$$N = G \frac{r + R \cos \alpha}{r + R \cos \alpha + d \sin \alpha}.$$

Кулон заңы бойынша ілініс күшінің максималь мәнін анықтаймыз:

$$F_{in}^{\max} = f_f N = f_f G \frac{r + R \cos \alpha}{r + R \cos \alpha + d \sin \alpha}.$$

Егер мына теңсіздік

$$F_f \leq F_f^{\max}$$

немесе

$$G \frac{d \cos \alpha}{r + R \cos \alpha + d \sin \alpha} \leq f_f G \frac{r + R \cos \alpha}{r + R \cos \alpha + d \sin \alpha}$$

орынды болса, каток бірқалыпты сырғанаусыз домалай алады. Теңсіздікті қысқартып,

$$d \cos \alpha \leq f_f (r + R \cos \alpha)$$

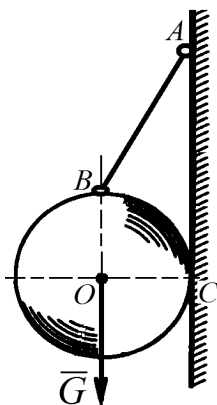
катоктың бірқалыпты сырғанаусыз домалау шартын аламыз.

Анықталған күштердің өрнектеріне белгілі тұрақты шамалардың мәндерін енгізсек,

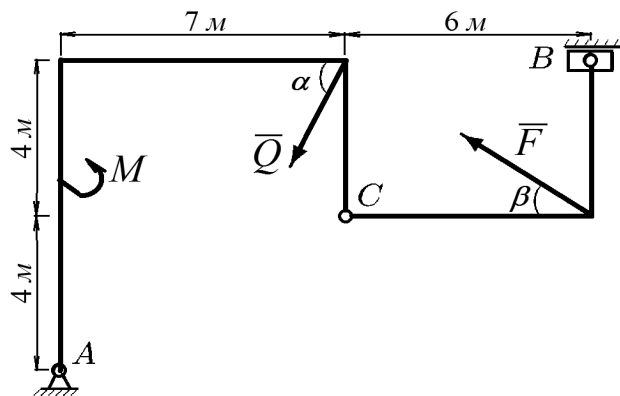
$$N = 295,907 \text{ Н}; \quad F = 4,81 \text{ Н}; \quad F_f = 2,527 \text{ Н}; \quad F_f^{\max} = 73,977 \text{ Н}.$$

Жаттығу есептері

1-есеп. Біртекті шар AB жібімен кедір-бұдыр қабырғаға ілінген. Қабырға мен шар арасындағы үйкеліс коэффициентінің қандай мәнінде шар 1-суретте көрсетілгендей тепе-теңдікте болады.



1-сурет

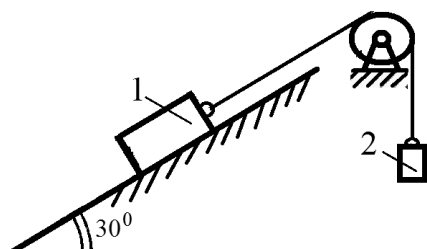


2-сурет

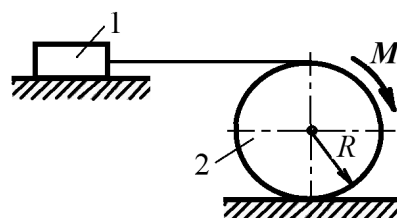
2-есеп. Конструкция C нүктесінде топсалы қосылған екі бөліктен тұрады (2-сурет). A тірегі – топсалы жылжымайтын тірек, ал B тірегі – үйкеліс коэффициенті $f = 0,2$, сырғанауға мүмкіндігі бар бір беткейлі байланыс. Конструкцияға моменті $M = 10 \text{ кНм}$ қос күш және $\alpha = 60^\circ$ бұрышпен $Q = 10 \text{ кН}$ күш түсірілген. Конструкция тепе-

теңдікте болуы үшін, оған $\beta = 30^\circ$ бұрышпен түсірілген күштің минималь шамасы қандай болатынын анықтаңыз.

3-есеп. Сырғанау үйкеліс коэффициенті $f = 0,3$ болса, салмағы 100 Н 1-жүк көлбеу жазықтықта тыныштық күйінде қалуы үшін, 2-жүктің ең үлкен салмағы қандай болуы қажет (3-сурет)?



3-сурет

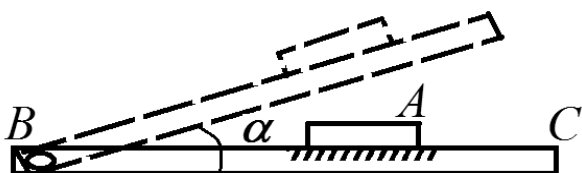


4-сурет

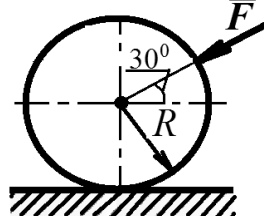
4-есеп. Салмағы 4 кН біртекті екі каток созылмайтын арқанмен бір денемен байланысқан (4-сурет). Радиусы $R = 0,5\text{ м}$, домалау үйкеліс коэффициенті $d = 0,005\text{ м}$, қос күштің моменті $M = 50\text{ Нм}$. Егер каток пен дене арасындағы сырғанау үйкеліс коэффициенті $f = 0,2$ болса, дененің сырғанауы үшін оның ең аз салмағы қандай болуға тиіс?

5-есеп. B топсасының өсі төңірегінде бұруға болатын BC тақтайдың үстіне A денесі қойылған (5-сурет). A денесі α бұрышының қандай мәніне дейін тепе-теңдікте болады?

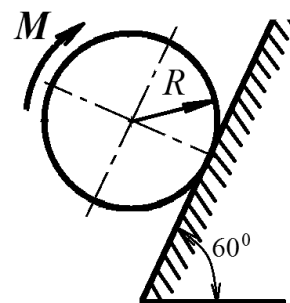
6-есеп. Салмағы 700 Н біртекті катокқа \vec{F} күші түсірілген (6-сурет). Каток сырғанап, домалай бастауы үшін қажетті осы күштің ең аз модулін анықтаңыз. $R = 1\text{ м}$. Сырғанау және домалау үйкеліс коэффициенттері тиісінше $f = 0,2$, $d = 0,008\text{ м}$.



5-сурет



6-сурет



7-сурет

7-есеп. Радиусы $R = 0,4$ м біртекті катокқа моменті $M = 210$ Нм қос күш түсірілген (7-сурет). Егер домалау үйкеліс коэффициенті $d = 0,006$ м болса, көлбеу жазықтықпен жоғары домалауы үшін катоктың ең аз салмағы қандай болуға тиіс?

8-есеп. Салмағы 520 Н цилиндр горизонталь жазықтықта жатыр. Цилиндрді домалатуға қажетті қос күштің ең аз моментінің модулін анықтаңыз. Домалау үйкеліс коэффициенті $d = 0,007$ м.

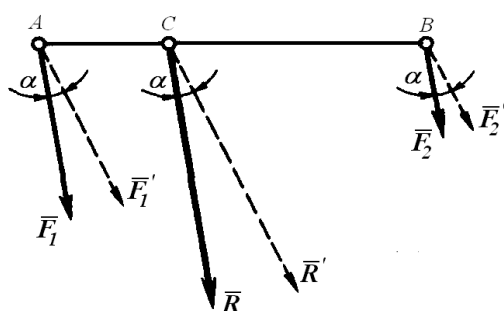
Қайталау сұрақтары:

1. Табиғатта қандай үйкелістердің түрлері бар?
2. Қандай жағдайда үйкеліс күші пайда болады?
3. Сырғанау үйкелісі дегеніміз не?
4. Кулон заңының теңдеуі.
5. Кулон заңдары.
6. Бұрыш және үйкеліс конусы. Үйкеліс коэффициенті.
7. Домалау үйкелісі. Домалау моменті.
8. Домалатуға қарсылық жасайтын момент.
9. Домалау үйкелісінің коэффициенті.

6-тарау. АУЫРЛЫҚ ЦЕНТРІ. ЖАЗЫҚ ҚИМАЛАРДЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

6.1. Ауырлық центрі

Кез келген қатты денені ауырлық күштері әсер ететін көптеген кіші бөлшектерден тұрады деп қарастыруымызға болады. Осы күштердің барлығы радиус бағытымен жердің центріне қарай бағытталады. Техникада кездесетін денелердің өлшемдері – жердің радиусына қатысты әлдеқайда кіші шама, онда кіші бөлшектерге түсірілген ауырлық күштерін параллель және вертикаль күштер деп есептеуге болады. Сонымен, дененің жекелеген бөлшектерінің ауырлық күштері параллель күштер жүйесін құрайды. Осы күштердің тең әсерлі күші **ауырлық күш** деп аталады. Алдыңғы тақырыптан белгілідей, *бір бағытталған екі параллель күштің тең әсерлі күші берілген күштер қосындысына тең де, осы күштерге параллель және бағыттас болады, ал оның әсер сызығы берілген екі күштің түсу нүктелерін қосатын кесіндіні сол күштердің модульдеріне кері пропорционал болатындай етіп екі бөлікке іштей бөлетін нүктеден өтеді* (6.1-сурет), яғни



6.1-сурет

$$(\overline{F_1}, \overline{F_2}), \overline{F_1} \parallel \overline{F_2}, F_1 \neq F_2,$$

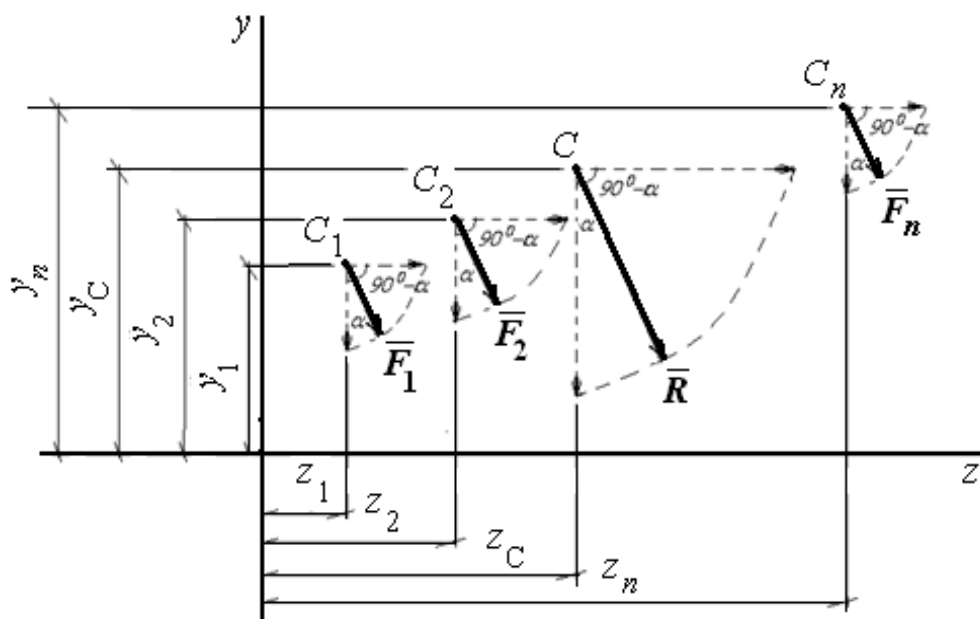
$$R = F_1 + F_2, \frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

6.1-суретте берілген параллель күштердің түсу нүктелерін қосатын AB сызығымен тең әсерлі күштің әсер сызығының қиылысы C нүктесімен белгіленген. Бұл нүкте **параллель күштердің центрі** деп аталады және оның орны қосатын күштердің бағытына тәуелді емес.

Дене бөлшектерінің ауырлық күштерінен құралған параллель күштер жүйесінің центрін дененің ауырлық центрі деп атайды. Параллель күштердің центрінің орны күштердің бағытына тәуелсіз болатындықтан, денені бұрса да, дененің ауырлық центрінің орны өзгермейді.

Кез келген параллель күштер жүйесінің ауырлық центрін анықтайтын формуланы қорытып шығарайық. Ол үшін түсу нүктелерінің C_1, C_2, \dots, C_n координаттары белгілі $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ параллель күштер жүйесін қарастырамыз (6.2-сурет). Осы күштердің \vec{R} тең әсерлі күштің түсу нүктесін C деп, ал осы берілген параллель күштердің центрі болып табылатын нүктенің координаттарын z_C, y_C деп белгілейік. Бізге белгілідей,

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (6.1)$$



6.2-сурет

Егер осы параллель күштердің арасында кейбірінің бағыты қарама-қарсы болса, олардың таңбалары әртүрлі болады. Сондықтан қандай да бір бағытты оң таңбалы деп алып, бағыты онымен сәйкес келетін күштердің модульдерін (6.1) формуласына оң таңбамен, ал қарама-қарсы бағыттағы күштердің модульдерін теріс таңбамен енгізу қажет.

Параллель күштердің центрінің орны күштердің бағытына тәуелсіз болатындықтан, берілген барлық күштерді сағат тілінің жүрісі бағытымен, олару өсімен параллель болатындай, α бұрышқа бұрамыз. Бұл жағдайда тең әсерлі күш те α бұрышқа бұрылады.

Координаттардың бас нүктесіне (O нүктесі) қатысты тең әсерлі күштің моменті теоремасын (Вариньен теоремасын) қолданамыз:

$$Rx_C = F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_nx_n = \sum_{i=1}^n F_ix_i,$$

мұнан:

$$x_C = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_nx_n}{R} = \frac{\sum_{i=1}^n F_ix_i}{R},$$

(6.1) формуласын ескерсек:

$$x_C = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_nx_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^n F_ix_i}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

Осы сияқты берілген барлық күштерді сағат тілінің жүрісіне қарсы бағытта, оларх өсімен параллель болатындай етіп, $90^\circ - \alpha$ бұрышқа бұрамыз және тең әсерлі күштің моменті теоремасын (Вариньен теоремасын) қолданып, параллель күштердің центрінің басқа координатын анықтайтын формула аламыз:

$$y_C = \frac{F_1y_1 + F_2y_2 + \dots + F_ny_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^n F_iy_i}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

Сонымен, жазық параллель күштердің центрінің орнын (координаттарын) анықтайтын формулалар:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_ix_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; y_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_iy_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (6.2)$$

Кеңістіктегі параллель күштердің центрінің орнын (координаттарын) келесі формулалармен анықтайды:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (6.3)$$

Келтірілген (6.2) және (6.3) формулалары дененің ауырлық центрінің координаттарын есептеуге қолданылады. Онда F_i деп дененің жеке бөлшектерінің ауырлық күшін алады, ал x_i, y_i, z_i – дененің жеке бөлшектерінің ауырлық центрлері.

Симметриялы дененің ауырлық центрі симметрия жазықтығында жатады.

Симметрия жазықтығы деп денені жазықтықтың бір жағында жататын материалдық нүктеге екінші жағында оған массасы сәйкес келетін нүкте болатындай етіп бөлетін жазықтықты айтамыз, сонымен қатар жазықтық осы нүктелерді қосатын сызыққа перпендикуляр және оны екіге бөледі.

Осының негізінде түзу сызықтың кесіндісінің ауырлық центрі оның ортасында болады. Жазық симметриялы фигураның – біртекті жұқа пластина – ауырлық центрі симметрия өсінде, яғни фигураны екі тең бөлікке бөлетін сызық бойында жатады.

Біртекті дененің бөлшектерінің салмағы олардың V_i көлемдеріне пропорционал, яғни

$$P_i = \gamma \cdot V_i,$$

мұндағы γ – дене материалының меншікті салмағы. Біртекті дене үшін тұрақты шама.

Жалпыламалы (6.3) формуласында алымынан да, бөлімінен де ортақ көбейткіш γ шығарып және қысқарту жүргізсек, біртекті дененің ауырлық центрінің координаттарын анықтайтын формулаларды аламыз немесе, басқаша айтқанда, көлемнің ауырлық центрін анықтаймыз:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_i}{\sum_{i=1}^n V_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_i}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i z_i}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad (6.4)$$

мұндағы V_i – дененің жеке бөлшектерінің көлемдері; x_i, y_i, z_i – дененің жеке бөлшектерінің ауырлық центрлері.

6.2. Жазық қималардың геометриялық сипаттамалары

Жазық қималардың статикалық моменттері, екпін моменттері және кедергі моменттері. Конструкция элементтерінің күш әсерлеріне қарсыласу қабілеті, олардың қима аудандарымен қатар, сол қималардың пішіндеріне де байланысты екендігін күрделі деформацияларды оқып үйренгенде көз жеткізуге болады. Бұл тарауда жазық қималардың геометриялық сипаттамалары – статикалық моменттері, екпін моменттері мен кедергі моменттеріне тоқталып, олардың қасиеттерін зерттейміз.

Стерженьнің кез келген ауданы A жазық қимасын қарастырайық (6.3-сурет). Бұл қимадан координаттары z, y шексіз кіші dA ауданын бөліп алып, төмендегідей интегралдар құрайық:

$$S_z = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A z dA. \quad (6.5)$$

Мұндай интегралдармен анықталатын геометриялық сипаттамаларды қиманың **статикалық моменттері** дейміз.

Статикалық моменттер z, y координаттарының таңбаларына байланысты оң, теріс және нөл болуы мүмкін; өлшем бірлігі – ұзындық бірлігінің үшінші дәрежесі ($мм^3, см^3, м^3$).

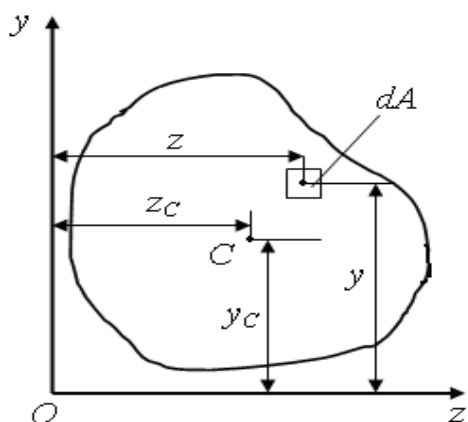
Берілген қиманың кез келген z, y өстеріне қатысты, ауырлық центрінің координаттары z_c, y_c белгілі болса, қиманың статикалық моменттерін келесі өрнекпен анықтауға болады (6.3-сурет):

$$S_z = y_c \cdot A, \quad S_y = z_c \cdot A. \quad (6.6)$$

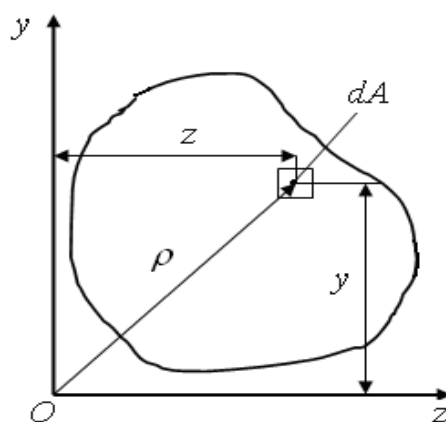
Керісінше, егер қиманың ауданы мен статикалық моменттері берілген болса, қиманың ауырлық центрі былайша анықталады:

$$z_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_z}{A}. \quad (6.7)$$

Ауырлық центр арқылы өтетін өстерді **центрлік өстер** деп атаймыз. Қиманың центрлік өстеріне қатысты статикалық моменттері нөлге тең.



6.3-сурет



6.4-сурет

Берілген қиманың кез келген z , y өстеріне қатысты **өстік екпін моменттері** деп төмендегі интегралмен анықталатын геометриялық сипаттамаларды айтамыз (6.4-сурет):

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad (6.8)$$

Берілген қиманың полюс деп аталатын, кез келген нүктеге қатысты **өрістік екпін моменті** деп төмендегі интегралмен анықталатын геометриялық сипаттаманы айтады (6.4-сурет):

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA, \quad (6.9)$$

мұндағы ρ – полюстен шексіз кіші ауданға дейінгі арақашықтық.

Берілген қиманың кез келген өзара перпендикуляр z , y өстеріне қатысты **центрден тепкіш екпін моменті** деп төмендегі интегралмен анықталатын геометриялық сипаттаманы айтамыз:

$$I_{yz} = \int_A yz dA. \quad (6.10)$$

Өзара перпендикуляр өстерге қатысты өстік екпін моменттерінің қосындысы осы өстердің қиылу нүктесіне қатысты өрістік екпін моментіне тең:

$$I_z + I_y = I_\rho. \quad (6.11)$$

Өстік, өрістік екпін моменттері – әрқашан оң шамалар, ал центрден тепкіш екпін моменттерінің шамалары оң, теріс және жеке жағдайларда нөлге тең болады. Екпін моменттерінің өлшем бірлігі – ендік бірлігінің төртінші дәрежесі ($мм^4, см^4, м^4$).

Күрделі қиманың екпін моменттері қарапайым бөліктерінің екпін моменттерінің қосындысына тең.

Өстік кедергі моменттері деп қиманың бірлігіне өстерге қатысты өстік екпін моменттерінің осы өстермен қиманың ең алшақ жатқан нүктелерінің арақашықтығына қатынасын айтамыз:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{z_{max}}. \quad (6.12)$$

Өрістік кедергі моменті деп қиманың өрістік екпін моментінің полюс пен қиманың ең алшақ жатқан нүктесінің арақашықтығына қатынасын айтады:

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{max}}. \quad (6.13)$$

Кедергі моменттерінің өлшем бірлігі – ендік бірлігінің үшінші дәрежесі ($мм^3, см^3, м^3$).

Өстік екпін моменті мен қима ауданының арасындағы байланыс арқылы табылатын шаманы

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad (6.14)$$

қиманың **екпін радиусы** деп атайды. Оның өлшем бірлігі – ендік бірлік ($мм, см, м$).

6.3. Кейбір қарапайым пішіндердің екпін моменттері мен кедергі моменттері

Іс жүзінде беріктік есептерінде жиі кездесетін қарапайым пішіндердің екпін моменттерін анықтауды қарастырайық.

Тік төртбұрыш. Табаны b , биіктігі h тік төртбұрыштың ауырлық центрінен өтетін, табаны мен биіктігіне параллель өстерге қатысты екпін моменттері мен кедергі моменттерін анықтайық (6.5, a -сурет).

I_z екпін моментін анықтау үшін (6.8) өрнегін пайдаланамыз. z өсінен y қашықтықта жатқан екі түзумен, табаны b , биіктігі dy , шексіз кіші dA ауданын бөліп алайық, мұндағы $dA = b \cdot dy$.

Олай болса,

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

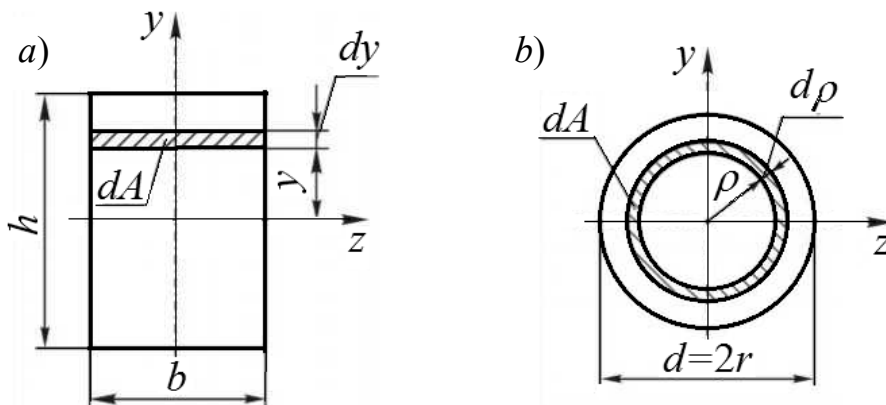
Сонымен,

$$I_z = \frac{bh^3}{12}. \quad (6.15)$$

Осы сияқты

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad (6.16)$$

аламыз.



6.5-сурет

Егер $y_{max} = \frac{h}{2}$, $z_{max} = \frac{b}{2}$ екенін ескерсек, кедергі моменттері (6.12) өрнектер арқылы анықталады, сонымен:

$$W_z = \frac{bh^2}{6}, W_y = \frac{hb^2}{6}, \quad (6.17)$$

Дөңгелек пен сақина. Диаметрі d дөңгелекті қарастырайық (6.5, b -сурет).

Дөңгелектің центрінен ρ және $\rho + d\rho$ қашықтығындағы, центрлері ортақ екі шеңбермен шектелген, шексіз кіші dA ауданын бөліп алайық, мұндағы $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$.

Дөңгелектің центрлік O нүктесіне қатысты өрістік екпін моментін (6.9) өрнегінен табамыз:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho. \quad (6.18)$$

Сонымен, дөңгелектің өрістік моменті:

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32} = 0,1d^4. \quad (6.19)$$

Дөңгелектің z , y өстеріне қатысты (6.5, b -сурет) екпін моменттерінің өзара тең екенін ($I_z = I_y$) атап өтіп, (6.11) өрнегін ескерсек, дөңгелектің өстік екпін моменттері

$$I_z = I_y = \frac{I_\rho}{2},$$

Демек,

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64} = 0,05d^4. \quad (6.20)$$

Дөңгелектің кедергі моменттерін (6.12) және (6.13) өрнектерінен анықтаймыз:

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} = 0,2d^3, \quad (6.21)$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} = 0,1d^3. \quad (6.22)$$

Сыртқы диаметрі D және ішкісі d сақинаның өрістік екпін моментін анықтау үшін, (6.18) өрнегіндегі интегралды $\frac{d}{2}$ мен $\frac{D}{2}$ аралығында алу қажет, яғни

$$I_{\rho} = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 d\rho,$$

немесе

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4) = 0,1D^4 (1 - c^4), \quad (6.23)$$

мұндағы $c = d / D$.

Сақинаның өстік екпін моменттерін анықтауда да (6.11) өрнегін пайдаланамыз:

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4) = 0,1D^4 (1 - c^4), \quad (6.24)$$

Сақинаның кедергі моменттері қарапайым жолмен, яғни (6.12) және (6.13) өрнектерін пайдаланумен анықталады:

$$W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4) = 0,2D^3 (1 - c^4), \quad (6.25)$$

$$W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - c^4) = 0,1D^3 (1 - c^4). \quad (6.26)$$

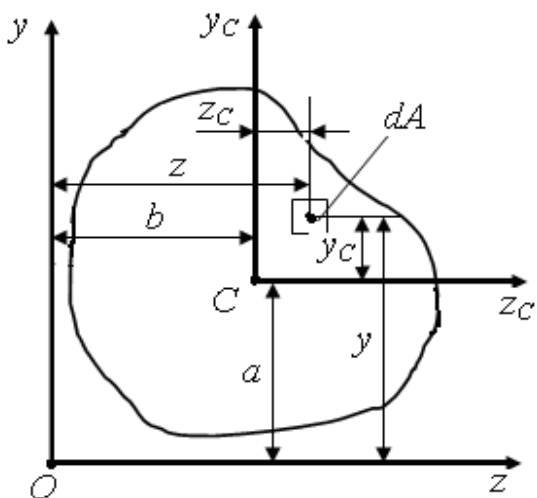
6.4. Параллель өстерге қатысты екпін моменттері

Бұл тәуелділікті анықтау үшін, ауданы A қиманы (6.6-сурет) қарастырайық. Қиманың ауырлық центрінен өзара перпендикуляр z_c, y_c өстері жүргізілген. Ауырлық центрден өтетін өстерді **центрлік өстер** деп, ал центрлік өстерге қатысты екпін моменттерін **центрлік екпін моменттері** деп атаймыз.

Қиманың центрлік екпін моменттері берілген деп қарастырып, центрлік өстерге параллель z, y өстеріне қатысты екпін моменттерінің шамаларын анықтайық.

Бөлініп алынған шексіз кіші dA ауданының $z_c y_c$ жүйесіндегі координаттары z_c, y_c , ал zOy жүйесіндегі координаттары $z = z_c + b$, $y = y_c + a$ болсын. Онда, анықтама бойынша, қиманың z өсіне қатысты екпін моменті

$$I_z = \int_A (y_c + a)^2 dA = \int_A y_c^2 dA + 2a \int_A y_c dA + a^2 \int_A dA.$$



6.6-сурет

Анықтама бойынша, мұндағы

$$\int_A y_c^2 dA = I_{z_c} ; \quad \int_A y_c dA = S_{z_c} ;$$

$$\int_A dA = A$$

және центрлік өске қатысты қиманың статикалық моменті S_{z_c} нөлге тең, олай болса:

$$I_z = I_{z_c} + a^2 A.$$

Дәл осылай I_y және I_{zy} анықталады, сонымен:

$$I_z = I_{z_c} + a^2 A;$$

$$I_y = I_{y_c} + b^2 A; \quad (6.27)$$

$$I_{zy} = I_{z_c y_c} + abA,$$

яғни қиманың кез келген центрлік өсіне параллель өске қатысты өстік екпін моменті центрлік екпін моментіне қиманың ауданын осы өстердің арақашықтығының квадратына көбейтіп қосқанға тең, ал центрден тепкіш екпін моменті центрлік өстерге қатысты центрден тепкіш екпін моментіне қиманың ауданын осы өстердің арақашықтықтарына көбейтіп қосқанға тең.

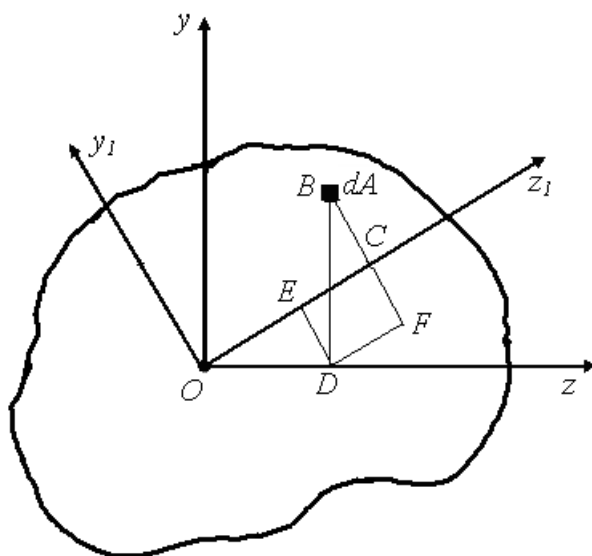
6.5. Бұрылған өстерге қатысты екпін моменттерінің байланысы

Суретте көрсетілген (6.7-сурет) қиманың z және y өстеріне қатысты I_z, I_y және I_{zy} екпін моменттері берілген болсын делік. Енді zOy өс жүйесін қандай да бір α бұрышына бұрайық және, әдеттегідей, сағат тіліне қарсы бұрылған бұрышты оң таңбалы деп ұйғарамыз. $I_z > I_y$ деп қабылдайық. Жаңа z_1 және y_1 өстеріне қатысты екпін моменттерін анықтайық.

Ол үшін шексіз кіші dA ауданының zOy пен z_1Oy_1 жүйелеріндегі координаттарының арасындағы өзара байланысын анықтайық ($\angle EOD = \angle DBF = \alpha$):

$$z_1 = OC = OE + EC = OD \cos \alpha + DB \sin \alpha = z \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$y_1 = BC = BF - FC = BD \cos \alpha - OD \sin \alpha = y \cos \alpha - z \sin \alpha.$$



6.7-сурет

Олай болса,

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A zy dA + \sin^2 \alpha \int_A z^2 dA \end{aligned}$$

жалпы (6.8) заңдылыққа байланысты

$$I_{y_1} = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \\ = \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A zy dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA.$$

Центрден тепкіш екпін моментін (6.10) өрнегінен табамыз:

$$I_{z_1 y_1} = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dA = \\ = \sin \alpha \cos \alpha \int_A y^2 dA - \sin \alpha \cos \alpha \int_A z^2 dA + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A zy dA.$$

Сонымен,

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha; \quad (6.28)$$

$$I_{y_1} = I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha; \quad (6.29)$$

$$I_{z_1 y_1} = \frac{1}{2} (I_z - I_y) \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha. \quad (6.30)$$

Алынған (6.28) және (6.29) өрнектерін қоссақ:

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y \quad (6.31)$$

екенін көреміз, яғни өзара перпендикуляр өстерге қатысты екпін моменттерінің қосындысы осы өстерді кез келген бұрышқа бұрғаннан өзгермейді.

6.6. Екпіннің бас өстері мен бас моменттері

Жоғарғы өрнектер бұрылған өстерге қатысты екпін моменттерінің шамалары бұрылу α бұрышына тәуелділігін көрсетеді, яғни бұрылу бұрышының қандай да бір мәнінде бұрылған өстерге қатысты екпін моменттері экстремальді мәндеріне жетуі мүмкін. Осы бұрыштың мәнін анықтап көрейік. Ол үшін (6.28) немесе (6.29) өрнегінен бір рет туынды алып, оны нөлге теңестірейік:

$$\frac{dI_z}{d\alpha} = -I_z \sin 2\alpha + I_y \sin 2\alpha - 2I_{zy} \cos 2\alpha = 0$$

немесе

$$I_{UV} = \frac{1}{2}(I_z - I_y) \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha = 0,$$

бұдан

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}. \quad (6.32)$$

Бұл формула бойынша бұрыштың екі мәні бар: бірі – α_0 , екіншісі – $\alpha_0 + 90^\circ$.

Осыдан мынадай тұжырымдама жасауға болады: екпін моменттері экстремальді мәндеріне орны (6.32) өрнегімен анықталатын, өзара перпендикуляр екі өске қатысты ие болады. Бұл өстерді **бас екпін өстері** деп, ал осы өстерге қатысты өстік екпін моменттерін **бас екпін моменттері** деп атайды. Бас екпін өстеріне қатысты центрден тепкіш екпін моменті нөлге тең. Бас екпін өстерін U, V деп белгілеу қабылданған.

Егер (6.32) формуласынан анықталған бұрыш $\alpha_0 > 0$ болса, бас екпін өстері U, V алғашқы Z, Y өстеріне қатысты сағат тілінің жүрісіне қарама-қарсы бағытта бұрылады, ал $\alpha_0 < 0$ болса, сағат тілінің жүрісі бағытымен бұрылады.

Енді бас екпін моменттері мәндерінің анықталу жолын қарастырайық. Ол үшін (6.28) және (6.29) өрнектеріндегі α -ның орнына α_0 -ді қойып, бас екпін моменттерін анықтайтын өрнектер аламыз:

$$\begin{aligned} I_u &= I_z \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{zy} \sin 2\alpha_0, \\ I_v &= I_z \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + I_{zy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Белгілі тригонометриялық функцияларды пайдалана отырып, бас екпін моменттерін анықтайтын (6.33) формулаларын келесі түрге келтіруге болады:

$$I_{u/v} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}. \quad (6.34)$$

Егер $I_z > I_y$ болса, максимум өсі z өсіне, ал $I_z < I_y$ болса, максимум өсі y өсіне жақын орналасады, яғни егер $I_z > I_y$ болса, $I_{max} = I_u, I_{min} = I_v$, ал $I_z < I_y$ болса, $I_{max} = I_v, I_{min} = I_u$.

Бас екпін моменттері мен қима ауданының арасындағы тәуелділікті көрсететін шама

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} \quad (6.35)$$

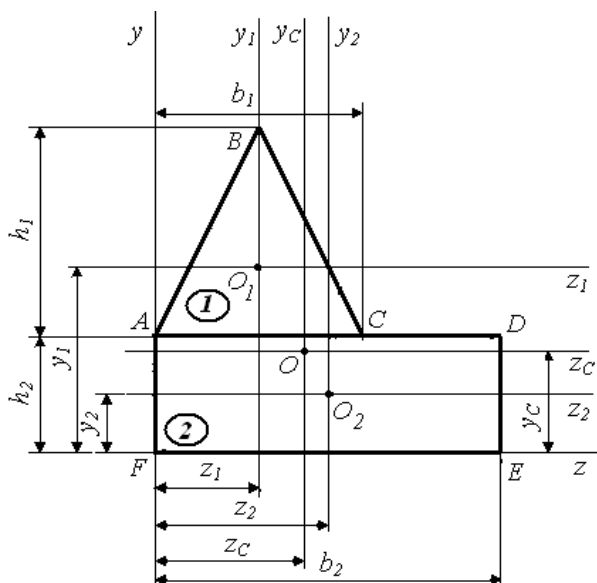
қиманың *бас екпін радиусы* деп аталады, өлшем бірлігі – ендік бірлік (мм, см, м).

6.7. Есептерді шешудің әдістемесі

6.1-мысал. Берілген $ABCDEF$ жазық фигураның ауырлық центрін анықтаңыз (6.8-сурет). $b_1 = 6$ см, $h_1 = 6$ см, $b_2 = 10$ см, $h_2 = 3$ см.

Шешуі: Жазық $ABCDEF$ фигурасының ауырлық центрін анықтау үшін, алдымен оны ауырлық центрлері мен геометриялық сипаттамалары белгілі формулалармен есептеуге келетін, қарапайым құрамдас бөліктерге бөлейік. Қарастырылып отырған жағдайда, табаны b_1 және биіктігі h_1 ABC үшбұрышы (1) мен табаны b_2 және биіктігі h_2 $ADEF$ тік төртбұрышына (2) жіктейміз.

Үшбұрыштың ауданы:



6.8-сурет

$$A_1 = 0,5 \cdot B_1 \cdot H_1 = 0,5 \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2.$$

Тік төртбұрыштың ауданы:

$$A_2 = B_2 \cdot H_2 = 10 \cdot 3 = 30 \text{ см}^2.$$

Берілген фигураның ауданы:

$$A = A_1 + A_2 = 18 + 30 = 48 \text{ см}^2.$$

Алдымен құрамдас фигуралардың өздік центральдық бас өстерін жүргіземіз.

Үшбұрыштың z_1 өсі оның табанына параллель және табанынан биіктігінің $1/3$ қатынасындай аралықта өтсе, y_1 өсі үшбұрыштың симметриялық өсі, олай болса, ол бас центрлік өс болып табылады және үшбұрыштың O_1 ауырлық центрінен өтіп, z_1 өсіне перпендикуляр орналасады.

Тік төртбұрыштың ауырлық центрі O_2 төртбұрыштың диагональдарының қиылысында жатады, ал одан өтетін және төртбұрыштың қабырғаларына параллель өстер, төртбұрыштың симметриялық өстері, яғни центрлік бас өстер.

Енді берілген фигураның ауырлық центрін анықтау үшін, көмекші zFy координаттар жүйесін таңдап аламыз. Оны, суретте көрсетілгендей, барлық фигура бірінші квадрантта жататындай етіп, төртбұрыштың табаны мен оң жақтағы қабырғасы арқылы жүргізіп, оларға қатысты құрамдас бөліктердің ауырлық центрлерінің координаттарын табамыз.

Үшбұрыш үшін:

$$z_1 = b_1 / 2 = 6 / 2 = 3 \text{ см}; \quad y_1 = h_2 + h_1 / 3 = 5 + 2 = 7 \text{ см}.$$

Төртбұрыш үшін:

$$z_2 = b_2 / 2 = 10 / 2 = 5 \text{ см}; \quad y_2 = h_2 / 2 = 3 / 2 = 1,5 \text{ см}.$$

Қиманың ауырлық центрін төмендегі формула бойынша табамыз:

$$z_c = \frac{\sum_1^n z_i \cdot A_i}{\sum_1^n A_i} = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2}{A_1 + A_2}; \quad y_c = \frac{\sum_1^n y_i \cdot A_i}{\sum_1^n A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2},$$

Сан мәндерін формулалардағы орнына қойсақ:

$$z_c = \frac{18 \cdot 3 + 30 \cdot 5}{18 + 30} = \frac{204}{48} = 4,25 \text{ см};$$

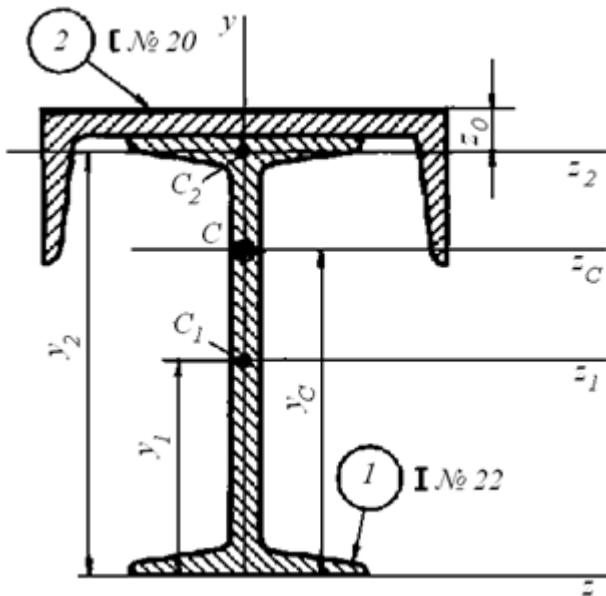
$$y_c = \frac{18 \cdot 5 + 30 \cdot 1,5}{18 + 30} = \frac{135}{48} = 2,81 \text{ см}.$$

Сонымен,

$$z_c = 4,25 \text{ см}; \quad y_c = 2,81 \text{ см}.$$

z_c мен y_c координаттар өстерін жүргіземіз (6.8-сурет).

6.2-мысал. Қиманың бас центрлік өстеріне қатысты екпін моменттерін анықтаңыз (6.9-сурет).



6.9-сурет

Шешуі: Қоставрдан және швеллерден құралған қима y өсіне қатысты симметриялы, олай болса, мұндай қиманың ауырлық центрі осы өстің бойында жатады деген сөз, яғни $z_c = 0$. Болат прокат түрлерінің арнаулы кестелерінен (8239-89 МемСТ) қоставрдың және (8240-89 МемСТ) швеллердің қажетті геометриялық сипаттамаларын аламыз:

$$A_1 = 30,6 \text{ см}^2; \quad I_{z_1} = 2550 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1} = 157 \text{ см}^4; \quad b_1 = 12 \text{ см}; \quad h_1 = 22 \text{ см}.$$

$$A_2 = 23,4 \text{ см}^2; \quad I_{z_2} = 1520 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = 113 \text{ см}^4;$$

$$b_2 = 20 \text{ см}; \quad h_2 = 7,6 \text{ см}; \quad z_0 = 2,07 \text{ см}.$$

Қиманың көмекші zOy координаттар жүйесіне қатысты (6.9-сурет) қоставр және швеллердің ауырлық центрлерінің координаттарын анықтаймыз:

a) қоставр үшін:

$$y_1 = h_1 / 2 = 22 / 2 = 11 \text{ см}; \quad z_1 = 0,$$

b) швеллер үшін:

$$y_2 = h_1 + s - z_0 = 22 + 0,52 - 2,07 = 20,45 \text{ см}; \quad z_2 = 0.$$

Қиманың көмекші z өсіне қатысты ауырлық центрін табамыз:

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{30,6 \cdot 11 + 23,4 \cdot 20,45}{30,6 + 23,4} = 15,1 \text{ см.}$$

Қиманың ауырлық центрінің C орнын анықтап, центрлік z_c өсін жүргіземіз (6.9-сурет). Енді құрамдас бөліктердің центрлік өстерінің қиманың ауырлық центрінен өтетін сәйкес өстерінің арақашықтықтарын анықтаймыз:

$$a_1 = y_1 - y_c = 11 - 15,1 = -4,1 \text{ см}; \quad b_1 = 0;$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 20,45 - 15,1 = 5,35 \text{ см}; \quad b_2 = 0.$$

Қиманың бас центрлік өстеріне қатысты екпін моменттерін параллель өстерге қатысты екпін моменттерінің қатынастарын пайдалана отырып табамыз:

$$\begin{aligned} I_z &= I_{z_1} + a_1^2 A_1 + I_{z_2} + a_2^2 A_2 = \\ &= 2550 + (-4,1)^2 \cdot 30,6 + 1520 + (5,35)^2 \cdot 23,4 = 11630,66 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$I_y = I_{y_1} + b_1^2 A_1 + I_{y_2} + b_2^2 A_2 = 157 + 0 \cdot 30,6 + 113 + 0 \cdot 23,4 = 6736,61 \text{ см}^4.$$

Сонымен, есептің шешуі $y_c = 15,1 \text{ см}; \quad I_{z_c} = 3910,3 \text{ см}^4;$
 $I_{y_c} = 2340 \text{ см}^4.$

6.3-мысал. 6.10, a -суретте көрсетілген құрамдас симметриясыз қиманың 1) ауырлық центрінің координатын табыңыз; 2) бас центрлік өстердің орнын анықтаңыз; 3) бас екпін моменттері мен бас екпін радиустарының шамасын есептеңіз. №16 швеллер, тең бүйірлі $90 \times 90 \times 9$ бұрыштама.

Шешуі: Қиманың құрамдас бөліктерінің центрлік өстеріне қатысты геометриялық сипаттамаларын арнаулы кестелерден аламыз:

a) тең бүйірлі $90 \times 90 \times 9$ бұрыштама үшін (8509-89 МемСТ) (6.10, b -сурет):

$$A_1 = 15,6 \text{ см}^2; \quad h_1 = 9 \text{ см}; \quad b_1 = 9 \text{ см}; \quad z_{0_1} = 2,55 \text{ см};$$

$$I_{z_1} = I_{y_1} = 118 \text{ см}^4; \quad I_{z_0} = 186 \text{ см}^4; \quad I_{y_0} = 50 \text{ см}^4;$$

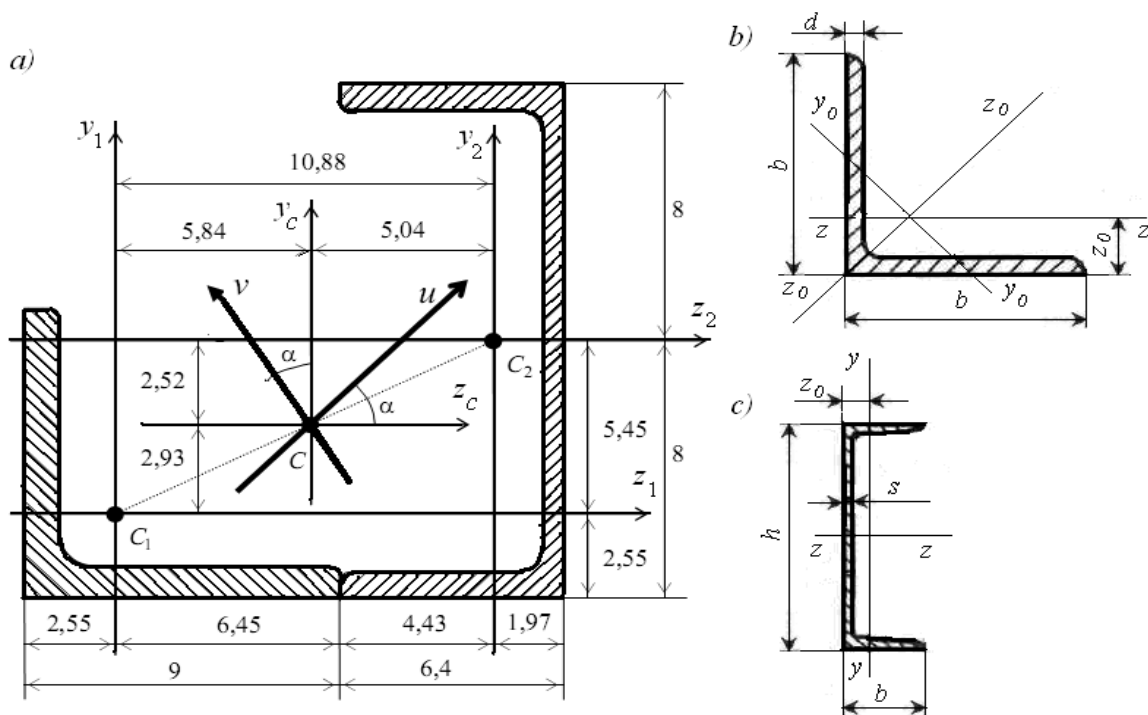
Бұрыштама центрлік өстеріне қатысты симметриялы емес, демек, $I_{z_1 y_1} \neq 0$. Оның шамасын төмендегі формуладан табамыз:

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_{y_0} - I_{z_0}}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 = \frac{50 - 186}{2} \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ) = -68 \text{ см}^4.$$

b) №16 швеллер үшін (8240-89 МемСТ) (6.10, с-сурет):

$$A_2 = 18,1 \text{ см}^2; \quad h_2 = 16 \text{ см}; \quad b_2 = 6,4 \text{ см};$$

$$I_{z_2} = 747 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = 63,3 \text{ см}^4; \quad z_{0_2} = 1,8 \text{ см}.$$



6.10-сурет

Швеллер ауырлық центрінен өтетін центрлік z_2 өсіне қатысты симметриялы болғандықтан, $I_{z_2 y_2} = 0$.

Құрамдас қиманың ауырлық центрін анықтау үшін көмекші zOy координаттар жүйесі ретінде бұрыштаманың центрлік өстерін алып, оларға қатысты құрамдас бөліктердің ауырлық центрлерінің координаттарын табамыз:

a) бұрыштама үшін:

$$z_1 = 0; \quad y_1 = 0.$$

b) швеллер үшін:

$$z_2 = b_1 + z_{0_2} = 9 + 1,8 = 10,8 \text{ см}; \quad y_2 = h_2 / 2 = 16 / 2 = 8 \text{ см}.$$

Онда, көмекші z_1, y_1 өстеріне қатысты құрамдас қиманың ауырлық центрінің координаттары мынаған тең:

$$z_c = \frac{15,6 \cdot 0 + 18,1 \cdot 10,8}{15,6 + 18,1} = \frac{195,48}{33,7} = 5,8 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{15,6 \cdot 0 + 18,1 \cdot 8}{15,6 + 18,1} = \frac{144,8}{33,7} = 4,3 \text{ см}.$$

z_c мен y_c координаттар өстерін жүргіземіз (6.10, *a*-сурет).

Қиманың z_c және y_c өстеріне қатысты екпін моменттерін анықтаймыз. Ол үшін қиманың құрамдас бөліктерінің ауырлық центрінің табылған z_c, y_c өстеріне қатысты координаттарын табамыз.

Құрамдас бөліктердің координаттары:

a) бұрыштама үшін:

$$b_1 = z_1 - z_c = 0 - 5,8 = -5,8 \text{ см}; \quad a_1 = y_1 - y_c = 0 - 4,3 = -4,3 \text{ см},$$

b) швеллер үшін:

$$b_2 = z_2 - z_c = 10,8 - 5,8 = 5 \text{ см}; \quad a_2 = y_2 - y_c = 8 - 4,3 = 3,7 \text{ см}.$$

Күрделі қиманың екпін моменттерін анықтау теоремасын және параллель өстерге қатысты екпін моменттерінің арасындағы қатынасты пайдаланып, құрамдас қиманың z_c, y_c өстеріне қатысты I_{z_c}, I_{y_c} өстік және $I_{z_c y_c}$ екпін моменттерін құрамдас элементтердің екпін моменттерінің қосындысы ретінде есептейміз, яғни

$$I_{z_c} = I_{z_1} + a_1^2 A_1 + I_{z_2} + a_2^2 A_2 =$$

$$= 118 + (-4,3)^2 \cdot 15,6 + 747 + (3,7)^2 \cdot 18,1 = 1401 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = I_{y_1} + b_1^2 A_1 + I_{y_2} + b_2^2 A_2 =$$

$$= 118 + (-5,8)^2 \cdot 15,6 + 63,3 + (5)^2 \cdot 18,1 = 1159 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c y_c} = I_{z_1 y_1} + a_1 \cdot b_1 \cdot A_1 + I_{z_2 y_2} + a_2 \cdot b_2 \cdot A_2 =$$

$$= -68 + (-4,3) \cdot (-5,8) \cdot 15,6 + (0) + 3,4 \cdot 5 \cdot 18,1 = 655,91 \text{ см}^4.$$

Бас центрлік өстердің бағыты α_0 бұрышының мәні мен таңбасы бойынша анықталады:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{z_c y_c}}{I_{y_c} - I_{z_c}} = \frac{2 \cdot 655,91}{1159 - 1401} = -5,406;$$

$$2\alpha_0 = -1,388; \quad 2\alpha_0 = -79^{\circ}31'; \quad \alpha_0 = -39^{\circ}46'.$$

Есептеу схемасында центрлік бас өстің орнын, α_0 бұрышын сағат тілі жүрісінің бағытымен сала отырып (бұрыштың таңбасына сәйкес), көрсетеміз (6.10, *a*-сурет).

Қиманың бас екпін моменттерін анықтаймыз

$$I_{\max}^{\min} = \frac{1}{2} \left[(1401 + 1159) \pm \sqrt{(1401 - 1159)^2 + 4 \cdot 655,91^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [2560 \pm 1334] = 1280 \pm 667 \text{ см}^4.$$

Бұдан

$$I_{\max} = 1280 + 667 = 1947 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = 1280 - 667 = 613 \text{ см}^4.$$

Тексеру:

a) қиманың центрлік және бас центрлік өстерге қатысты екпін моменттерінің қосындылары өзара тең

$$I_{\max} + I_{\min} = I_{z_c} + I_{y_c}; 1401 + 1159 = 1947 + 613; 2560 = 2560$$

демек, мұнан біз өстерді бұрғанда екпін моменттерінің қосындысының өзгермейтіндігіне көз жеткіздік;

b) бас центрлік өске қатысты қиманың центрден тепкіш екпін моменті нөлге тең, яғни

$$I_{uv} = \frac{I_{z_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{z_c y_c} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

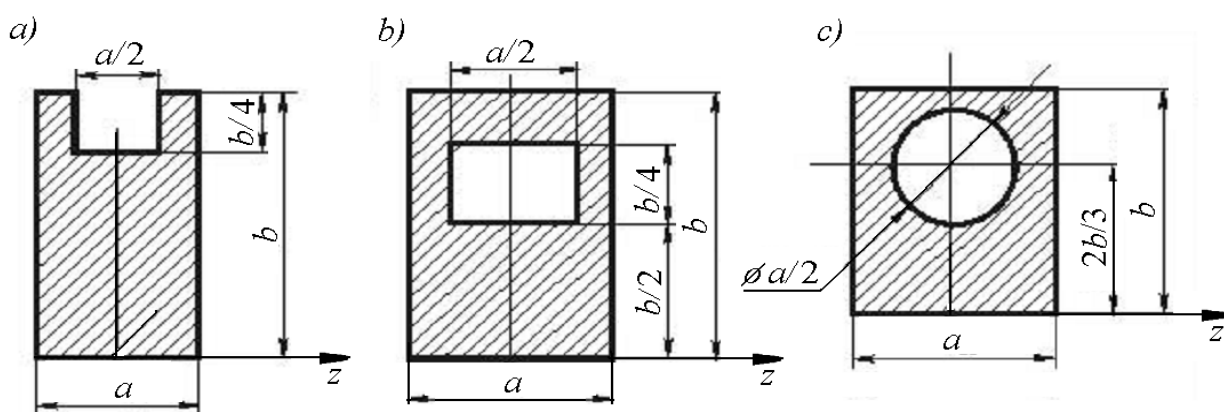
Бұл жағдайда

$$\begin{aligned} I_{uv} &= \frac{1401 - 1159}{2} \sin(-1,388) + 655,91 \cdot \cos(-1,3881) = \\ &= -116,301 + 116,301 = 0. \end{aligned}$$

Сонымен, есеп дұрыс шығарылған.

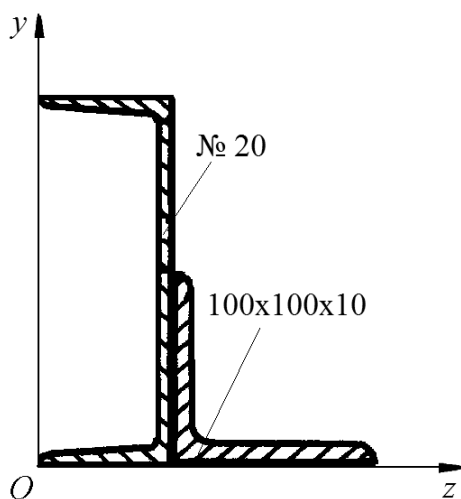
Жаттығу есептері:

1-есеп. Төмендегі жазық қималардың ауырлық центрлерінің координаттарын анықтаңыз (1-сурет). $a = 5 \text{ см}$, $b = 8 \text{ см}$.

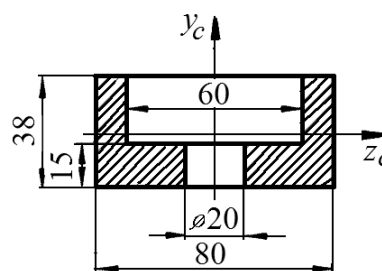


1-сурет

2-есеп. № 20 (8240-89 МемСТ) швеллер мен 100×100×10 (8509-89 МемСТ) бұрыштамадан құрылған құрама қиманың ауырлық центрін есептеңіз (2-сурет).



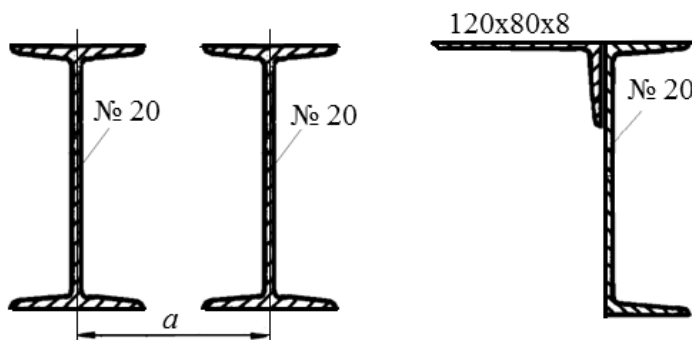
2-сурет



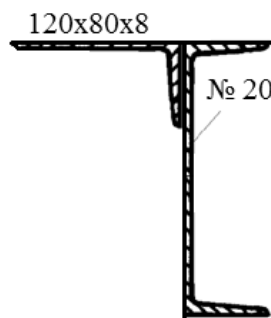
3-сурет

3-есеп. 3-суретте механизм тетігінің көлденең қимасы көрсетілген. Қиманың центрлік z_c және y_c өстеріне қатысты екпін моменттерін анықтаңыз.

4-есеп. Екі қоставрдан құрылған қиманың центрлік екпін моменттері бірдей болуы үшін, қоставрларды қандай арақашықтыққа орналастыру қажет (4-сурет)?



4-сурет



5-сурет

6-есеп. Суретте көрсетілген қиманың ауырлық центрі екпіннің бас өстерінің центрлік өстерге қатысты бағыты мен бас екпін моменттерінің шамасы неге тең (5-сурет)?

Қайталау сұрақтары:

1. Қандай нүкте берілген дененің ауырлық центрі деп аталады? Дененің ауырлық центрінің координаттары қалай анықталады?

2. Біртекті денелердің, жазық фигуралардың және сызықтардың ауырлық центрінің координаттары қандай формулалармен анықталады?
3. Жазық қиманың геометриялық сипатамалары дегеніміз не?
4. Статикалық момент деп нені айтамыз және оның өлшем бірлігі қандай?
5. Центрлік өске қатысты статикалық момент неге тең?
6. Жазық қиманың ауырлық центрінің координаттарын қандай формуламен анықтайды?
7. Қандай қималардың ауырлық центрін анықтағанда, бір координатын есептеу жеткілікті болады?
8. Қандай фигуралардың ауырлық центрін есептемей-ақ анықтауға болады?
9. Қиманың өстік, өрістік (полярылық) және центрден тепкіш екпін моменті деп нені айтамыз?
10. Жазық қиманың екпін моменттерінің өлшем бірліктері қандай?
11. Өзара перпендикуляр екі өске қатысты екпін моменттерінің қосындысы неге тең?
12. Қандай екпін моменттері әрдайым оң таңбалы?
13. Центрден тепкіш екпін моменті қандай фигуралар үшін және қандай өстерге қатысты нөлге тең?
14. Центрден тепкіш екпін моменті координат өстерін 90° бұрғаннан қалай өзгереді?
15. Тік төртбұрыштың және теңбүйірлі үшбұрыштың центрлік өстерге қатысты және олардың табандары арқылы өтетін өстерге қатысты екпін моменттері неге тең?
16. Дөңгелек пен сақинаның центрлік өстерге қатысты өстік екпін моменттері неге тең?
17. Параллель өстерге қатысты екпін моменттерінің арасында қандай байланыстар бар?

ЕКІНШІ БӨЛІМ. КИНЕМАТИКА

7-тарау.

НҮКТЕ КИНЕМАТИКАСЫ

7.1. Кинематиканың негізгі түсініктері мен анықтамалары

Теориялық механиканың материялық денелердің қозғалысын оларға әсер ететін күштерге тәуелсіз зерттейтін бөлімін *кинематика* деп атайды.

Қозғалыстағы нүктенің кеңістікте сызған сызығын нүктенің *траекториясы* деп атайды. Нүкте қозғалысының негізгі геометриялық сипаттамалары оның кеңістіктегі орны, жылдамдығы және үдеуі болып табылады.

Осы зерттеулерде денелердің массасы (инерттілігі) да есепке алынбайды. Сондықтан да кинематиканы қозғалыс геометриясы, кейде оны «төрт өлшемді геометрия» деп те атайды. Өйткені Ньютон механикасында, яғни қазіргі кезеңдегі теориялық механиканың негізі болып саналатын классикалық механикада материя (материялық дене) орын ауыстыратын кеңістіктің қасиеттері үш өлшемді евклидтік кеңістіктің аксиомалары мен теоремаларына тәуелді, ал төртінші өлшем ретінде дәл кеңістік сияқты материяға тәуелсіз болады, абсолютті шама – *уақыт* алынады.

Классикалық механикада материялық дененің (бұдан былай қысқартылып, дене деп қана аталады) уақытқа байланысты орын ауыстыру шапшаңдығы немесе жылдамдығы жарықтың таралу жылдамдығынан едәуір кем болғанда ғана осы төрт өлшем дене қозғалысын зерттеуге пайдаланылады.

Жоғарыда айтылған үш өлшемді біз өмір сүріп отырған кеңістікті өрнектейтін көп координаттар жүйесінен (декарттық тікбұрышты, полярлық, цилиндрлік, сфералық) қарапайым декарттық, тікбұрышты жүйесі пайдаланылады.

Осы координаттарды анықтау үшін ұзындық бірліктері алынады.

Халықаралық СИ жүйесінде ұзындықтың өлшем бірлігі болып метр (*м*), уақыт бірлігі ретінде секунд (*с*) алынады.

Уақыт үздіксіз оң шама болғандықтан, баска айнымалы кинематикалық сипаттамалардың аргументі болып алынады. Уақыттың

саналуы бастапқы уақыт кезінен ($t = 0$) есептелетінін әр жағдайда келісіп алған жөн, өйткені бастапқы уақыт кезі – шартты ұғым. Іргелес екі уақыт кезеңінің айырымы *уақыт аралығы* деп аталады, яғни $\Delta t = t_2 - t_1$.

Санақ жүйесі. Механикалық қозғалыс. Абсолютті және салыстырмалы қозғалыстар. Салыстырмалы бейнеге бекітілген координаттар жүйесі *санақ жүйесі* деп аталады.

Кинематикада санақ жүйесі ретінде жердегі салыстырмалы бейнеге (үйлерге, ағаштарға және басқа денелерге), ал аспан денелері қозғалысын зерттеуде бастапқы нүктесі Күн ортасына бекітіліп, өстері қозғалмайтын жұлдыздарға бағытталған декарттық тікбұрышты координаттар жүйесі алынады.

Дененің кеңістіктегі орны уақытқа байланысты осы алынған санақ жүйесіне қарағанда өзгеріп тұрса, онда сол жүйеге қатысты *қозғалыста*, ал орны өзгермесе, *тыныштық қалпында* болады дейміз.

Іс жүзінде кез келген дененің қозғалысы тек басқа денемен салыстырғанда ғана анықталатыны белгілі, яғни координаттар жүйесі бекітілген дене абсолютті «қозғалыссыз» деп алынады да (Жердің өз өсінен айналуы ескерілмейді), мұндай санақ жүйесі, тиісінше, *абсолютті* деп аталады. Ал табиғатта қозғалыссыз денелер болмайтындықтан, оған бекітілген координаттар жүйесі *салыстырмалы санақ жүйесі* деп аталады.

Жоғарыда келтірілген қозғалыс анықтамасына сәйкес, абсолютті санақ жүйесіне қатысты қозғалыс – *абсолютті қозғалыс*, ал қозғалыста болатын санақ жүйесіне қатысты қозғалыс *салыстырмалы қозғалыс* болып саналады.

Кинематикада қозғалыс түрлерінің (механикалық, физикалық, химиялық, биологиялық) ең қарапайым түрі болып саналатын *механикалық қозғалыс* зерттеледі.

Қорыта айтқанда, қозғалыс материяның тұрақты атрибуты: қозғалыссыз материя жоқ, материясыз қозғалыс жоқ.

Механикалық қозғалысқа мысал ретінде әртүрлі машиналар, механизмдер мен қозғалтқыш бөлшектері, жердегі көліктер және теңіз кемелері, ұшатын аппараттар, сұйық пен газ, жер қыртысы, жердің жасанды серіктері мен аспан денелерінің қозғалысын айтуға болады.

Кез келген қатты денені материялық нүктелер жиынтығы деп алуға болады. Қозғалыстағы дене нүктелері берілген санақ жүйесіне қатысты әртүрлі қозғалуы мүмкін. Дененің берілген санақ жүйесіне қатысты

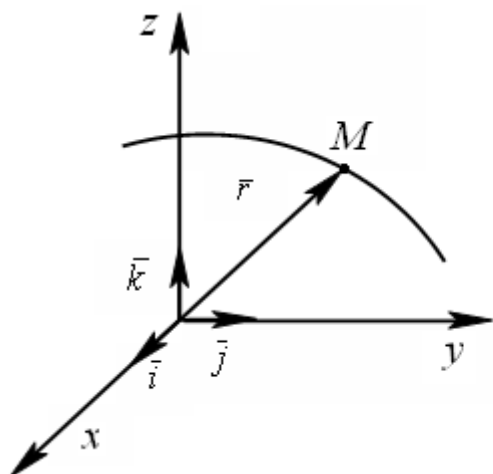
қозғалысын толық анықтау үшін, оның әрбір нүктесінің алынған санақ жүйесіне қатысты қозғалысын білу қажет. Сондықтан алдымен нүкте кинематикасының негізгі мәселелерін шешіп алған соң, қатты дене кинематикасын зерттеуге болады.

7.2. Нүкте қозғалысының берілу тәсілдері

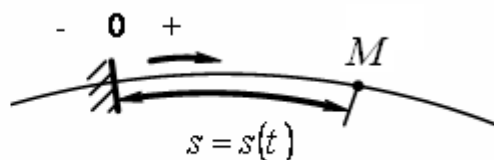
Нүкте қозғалысы үш түрлі: векторлық, координаттық және табиғи тәсілмен беріледі.

M нүктесі $Oxyz$ координат жүйесіне қатысты қозғалсын делік (7.1-сурет). Нүктенің кез келген мезеттегі орнын O нүктесінен M нүктесіне жүргізілген радиус-вектор \vec{r} арқылы анықтауға болады. Радиус-вектордың уақытқа байланысты шамасы мен бағыты өзгеріп отырады, яғни радиус-вектор функция болып табылады:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (7.1)$$



7.1-сурет



7.2-сурет

Бұл теңдеу нүкте қозғалысының **векторлық теңдеуі** деп аталады.

Егер 7.1-суреттегі M нүктесінің кез келген мезеттегі кеңістіктегі орнын анықтайтын координаттар уақытпен байланысты анықталған функциялар болса, нүкте қозғалысы **координаттық тәсілмен** берілген деп есептеледі:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (7.2)$$

Бір жағынан, бұл теңдеулер *нүкте траекториясының параметрлік теңдеулері* болып табылады. Осы теңдеулерден t уақыты жойылса, нүкте траекториясының координаттары арқылы анықталған теңдеу алынады.

Қозғалатын нүктенің траекториясы белгілі болса, нүкте қозғалысын *табиғи тәсілмен* беруге болады. Траекторияның бойындағы қозғалмайтын O нүктесін таңдап алып, оны санақ жүйесінің басы деп есептеп, санақтың оң және теріс бағытын белгілейік (7.2-сурет).

Траекториядағы қозғалатын M нүктесінің орны белгілі таңбамен алынған және траектория бойындағы доғамен өлшенген O нүктесінен M нүктесіне дейінгі арақашықтыққа тең, s қисық сызықты координатпен анықталады, яғни $s = \overset{\cup}{OM}$. Траектория бойындағы нүктенің уақыттың кез келген мезетіндегі орнын анықтайтын доғалық координат s уақытқа тәуелді функция болып есептеледі:

$$s = s(t). \quad (7.3)$$

Бұл тәуелділік *нүктенің траектория бойымен қозғалу заңы* деп аталады. Сонымен, нүкте қозғалысының *табиғи тәсілмен* берілуі үшін мынадай жағдайлар белгілі болуы қажет:

- 1) нүктенің траекториясы;
- 2) санақтың оң және теріс бағыттары көрсетілген траекториядағы санақ жүйесінің басы;
- 3) нүктенің траектория бойымен қозғалысының заңдылығы.

7.3. Нүкте қозғалысы әртүрлі тәсілдермен берілген жағдайдағы жылдамдығы мен үдеуін анықтау

Векторлық тәсілдегі нүктенің жылдамдығы мен үдеуі. Қозғалыстағы M нүктесінің t уақыт мезетіндегі орны $\vec{r}(t)$ радиус-векторымен, $t + \Delta t$ мезеттегі M_1 орны $\vec{r}(t + \Delta t)$ радиус-векторымен анықталсын (7.3-сурет). Сонда M нүктесінің Δt уақыт аралығындағы орын ауыстыруы, яғни уақыт өсімшесі Δt -ға сәйкес келетін радиус-вектор өсімшесі $\Delta \vec{r}$ былай анықталады:

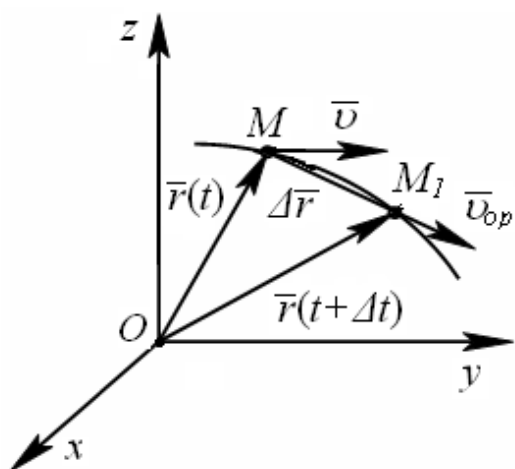
$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \quad (7.4)$$

Радиус-вектор өсімшесінің уақыт өсімшесіне қатынасы нүктенің Δt уақыт аралығындағы **орташа жылдамдығы** деп аталады:

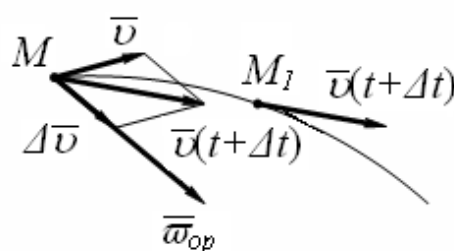
$$\bar{v}_{op} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}. \quad (7.5)$$

Нүктенің **лездік жылдамдығы** деп нүктенің орташа жылдамдығының уақыт өсімшесі нөлге ұмтылғандағы шегін айтады:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}. \quad (7.6)$$



7.3-сурет



7.4-сурет

Сонымен, нүкте қозғалысы векторлық тәсілмен берілгенде, нүктенің кез келген уақыттағы лездік жылдамдығы оның радиус-векторының уақыт бойынша алынған бірінші туындысына теңвекторлық шама болады, демек, жылдамдық радиус-вектордың уақытқа байланысты өзгеруіне тең.

Нүктенің t уақыт мезетіндегі жылдамдығы $\bar{v}(t)$, ал $t + \Delta t$ мезеттегі жылдамдығы $\bar{v}(t + \Delta t)$ болсын делік (7.4-сурет).

$$\Delta \bar{v} = \bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)$$

векторы уақыт өсімшесі Δt -ға сәйкес келетін $\Delta \bar{v}$ жылдамдық өсімшесін білдіреді. Жылдамдық өсімшесінің уақыт өсімшесіне қатынасын нүктенің Δt уақыт аралығындағы **орташа үдеуі** деп атайды:

$$\bar{\omega}_{op} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}.$$

Нүктенің үдеуі деп нүктенің орташа үдеуінің $\bar{\omega}_{op}$ уақыт өсімшесі Δt -нің нөлге ұмтылғандағы шегін айтады:

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \quad (7.7)$$

Яғни нүкте қозғалысы векторлық тәсілмен берілгенде, нүктенің үдеуі оның лездік жылдамдығынан уақыт бойынша алынған туындысына немесе оның радиус-векторынан уақыт бойынша алынған екінші туындысына тең векторлық шама болады.

Нүктенің координаттық тәсілдегі жылдамдығы мен үдеуі. Нүктенің кеңістіктегі орнын анықтау үшін, тікбұрышты декарттық координаттар жүйесін (7.1-сурет) қарастырайық. Нүкте қозғалысы декарттық координаттар жүйесінде берілсін делік:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (7.8)$$

яғни қозғалыстағы M нүктесінің әрбір уақыт кезеңіне сәйкес $Oxyz$ координаттар жүйесіне қатысты орнын – x, y, z координаттарын анықтауға болады. Сондықтан (7.8) теңдеулерін нүктенің тікбұрышты декарттық координаттардағы қозғалыс теңдеулері деп немесе нүктенің қисықсызықты қозғалысының координатты тәсілмен берілгендегі қозғалыс заңы деп атаймыз.

7.1-суретте бейнеленген қозғалмайтын координат жүйесі өстерінің бірлік орттарын $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ деп белгілейік. Координаттар жүйесінің бас нүктесінен қозғалушы M нүктесінің радиус-векторын жүргізейік. Осы суреттен M нүктесінің радиус-векторы мен координаттары келесі байланыста болатыны көрінеді:

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}.$$

Қозғалушы M нүктесінің жылдамдығын, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ орттарын өзгермейтін тұрақты шама деп алып, (7.6) формуланы қолданып есептейік:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k}. \quad (7.9)$$

Осы формуладағы орттардың алдындағы коэффициенттер нүктенің жылдамдық векторының координат өстеріндегі проекциялары болып табылады:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (7.10)$$

Жылдамдықтың модулі келесі формуламен есептеледі:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (7.11)$$

Жылдамдық векторының бағыты бағыттаушы косинустар арқылы анықталады:

$$\cos\left(\widehat{v, \bar{i}}\right) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\left(\widehat{v, \bar{j}}\right) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos\left(\widehat{v, \bar{k}}\right) = \frac{v_z}{v}. \quad (7.12)$$

Нүктенің декарттық координаттар жүйесіндегі қозғалысының теңдеуінен оның үдеу векторының модулі мен бағытын анықтайық.

Нүктенің үдеуі (7.7) формуладан анықталады:

$$\bar{\omega} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \bar{k}. \quad (7.13)$$

Осы формуладағы орттардың коэффициенттері нүктенің үдеу векторының координат өстеріндегі проекциялары болады:

$$\omega_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad \omega_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad \omega_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (7.14)$$

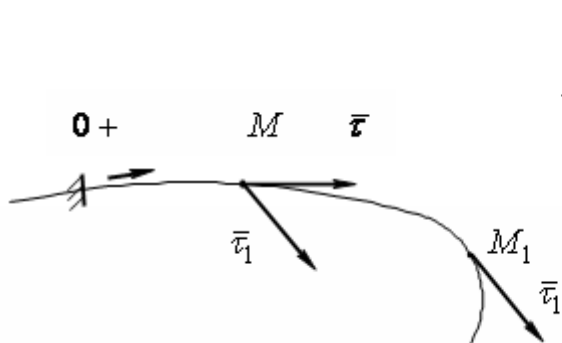
Үдеудің модулі келесі формуламен есептеледі:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (7.15)$$

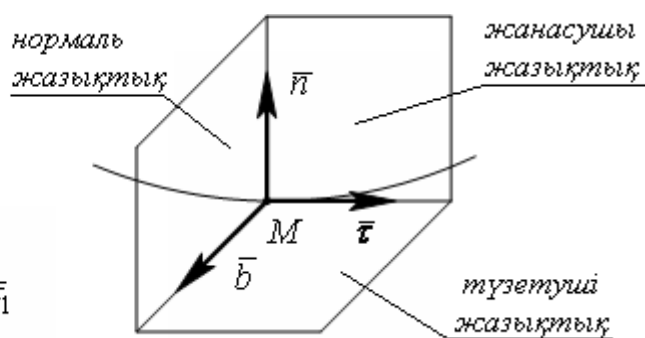
Үдеудің бағыттаушы косинустары:

$$\cos\left(\frac{\wedge}{\varpi, \bar{i}}\right) = \frac{\varpi_x}{\varpi}, \quad \cos\left(\frac{\wedge}{\varpi, \bar{j}}\right) = \frac{\varpi_y}{\varpi}, \quad \cos\left(\frac{\wedge}{\varpi, \bar{k}}\right) = \frac{\varpi_z}{\varpi}. \quad (7.16)$$

Табиғи координат өстері. Кеңістіктегі қисық сызықты қарастырайық (7.5-сурет). Қисықтың бойынан кез келген M нүктесі мен оған жақын жатқан M_1 нүктесін алайық. Қисықтың M нүктесінде жүргізілген жанаманы MM_1 қиюшының M нүктесіне M_1 нүктесінің ұмтылғандағы шегі ретінде анықтайық. Доғалық s координаттың оң бағытына сәйкес M нүктесінде жанама бірлік вектор $\bar{\tau}$ жүргізейік. M_1 нүктесіндегі жанама бірлік векторды $\bar{\tau}_1$ деп белгілейік. M_1 нүктесіндегі $\bar{\tau}_1$ векторын M нүктесіне көшіріп, M нүктесіне түсірілген екі $\bar{\tau}$ және $\bar{\tau}_1$ векторлары жататын жазықтықты тұрғызамыз. Осы жазықтықтың M_1 нүктесі M нүктесіне ұмтылғанда алатын шектік орны **жанасушы жазықтық** деп аталады ($\bar{\tau}M\bar{n}$ – жанасушы жазықтық).



7.5-сурет



7.6-сурет

M нүктесінен жанамаға тік (перпендикуляр) тұрғызылған жазықтықты **нормаль жазықтық** деп атаймыз ($\bar{n}M\bar{b}$ – нормаль жазықтық). Жанасушы және нормаль жазықтықтардың қиылысатын түзуі сызбадағы қисықтың бас нормалін айқындайды. Бас нормальдың бойымен траекторияның ойысына бағыттап, \bar{n} ортты тұрғызамыз. $\bar{b} = [\bar{\tau}, \bar{n}]$ ережесіне сүйене отырып, бірлік бинормальдық \bar{b} векторын енгізейік. Жанама мен бинормаль арқылы жүргізілген жазықтық **түзетуші жазықтық** деп аталады ($\bar{\tau}M\bar{b}$ – түзетуші жазықтық).

Сонымен, орттары $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{k}$ болатын үш табиғи өстерімен табиғи үшжақты құратын үш координат жазықтығының орны анықталады.

Бұл жазықтықтар, тиісінше, *жанасушы*, *нормаль*, *түзетуші жазықтықтар* деп аталады (7.6-сурет).

Бұл *Мтв* табиғи өстер жүйесі *М* нүктесімен бірге траекторияның бойымен қозғалатындықтан, кейде *қозғалмалы* немесе *ілесуші үшжақтық* деп те атайды.

Жылдамдықпен үдеудің табиғи өстердегі проекциялары. Нүктенің траекториясы мен нүктенің осы траектория бойымен қозғалысының заңдылығы $s = s(t)$ түрінде берілген делік (7.7-сурет). Бұл жағдайда нүктенің жылдамдығы қалай анықталатынын қарастырайық. Нүктенің орны \vec{r} радиус-вектормен анықталғандықтан, жылдамдықты анықтайтын (7.6) формуласын жазайық:

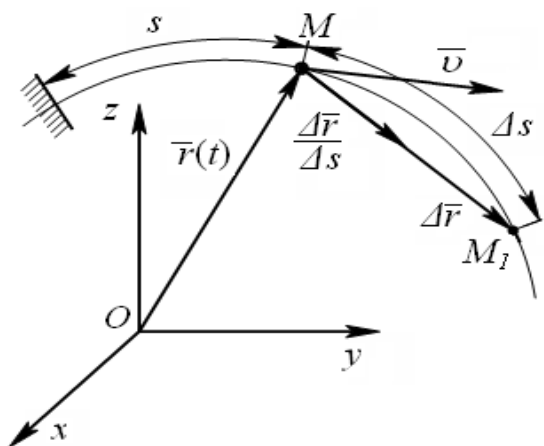
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (7.17)$$

Осы теңдікті келесі түрде жазайық:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (7.18)$$

Δs доғаның оны тартушы $\Delta \vec{r}$ хордасына қатынасы шегінің модулі бірге тең болады, ал MM_1 қиюшысы M_1 нүктесі M нүктесіне ұмтылғанда, траекторияның M нүктесінде тұрғызылған жанамасымен сәйкес және бағыттас болады, сондықтан

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau},$$



7.7-сурет

мұндағы $\vec{\tau}$ – жанاما өстің орты.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

екенін еске алсақ,

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}, \quad (7.19)$$

немесе

$$\bar{v} = v_\tau \bar{\tau} \quad (7.20)$$

болып шығады.

Мұндағы $v_\tau = \dot{s}$ жылдамдықтың траектория жанамасына проекциясын білдіреді.

Нүкте үдеуінің табиғи өстердегі проекцияларын анықтайық. Жылдамдық векторынан (7.17) уақыт бойынша туынды алайық:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau \bar{\tau}) = \frac{dv_\tau}{dt} \bar{\tau} + v_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (7.21)$$

$\frac{d\bar{\tau}}{dt}$ векторының шамасы мен бағытын анықтайық.

Анықтама бойынша:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta t}. \quad (7.22)$$

Шекті түрлендірейік:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

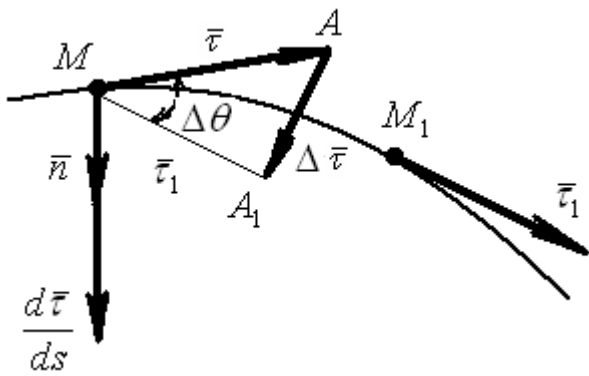
Олай болса,

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (7.23)$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} \quad (7.24)$$

векторы траекторияның ойысына бағытталады (7.8-сурет), жанасушы жазықтықта жатады және траекторияның жанамасына перпендикуляр болады, өйткені $\bar{\tau}^2 = 1$ теңдігінен келесі тұжырым жасаймыз:

$$\frac{d(\bar{\tau}^2)}{ds} = 2 \left(\bar{\tau} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right) = 0.$$



7.8-сурет

Сонымен, $\frac{d\bar{r}}{ds}$ векторының

бағыты бас нормальдың орты \bar{n} векторымен бағыттас (7.8-сурет).

Бұл вектордың модулі ΔMAA_1 үшбұрышынан келесі түрде анықталады:

$$\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \theta}{2}}{\Delta s},$$

немесе

$$\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \theta}{2}}{\frac{\Delta \theta}{2}} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s}.$$

$\frac{\Delta \theta}{\Delta s}$ қатынасын траекторияның Δs доғасының **орташа қисықтығы**,

ал оның Δs нөлге ұмтылғандағы шегін **траекторияның M нүктесіндегі қисықтығы** деп атайды, яғни

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = k. \quad (7.25)$$

Траекторияның кез келген нүктесінің қисықтығына кері $\rho = \frac{1}{k}$ шаманы траекторияның қисықтық радиусы деп атайды. (7.23) - (7.25) формулаларын қолданып, \bar{r} ортынан уақыт бойынша алынған туындыны анықтайық:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{\rho} \bar{n}. \quad (7.26)$$

Осы теңдікпен анықталған $\frac{d\bar{r}}{dt}$ мәнін (7.21) формуласына қояйық.

Сонда үдеу векторының табиғи өстеріндегі құраушыларын анықтаймыз:

$$\overline{\omega} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \overline{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \overline{n}. \quad (7.27)$$

Осы өрнектен нүктенің $\overline{\omega}$ үдеу векторының жанасушы жазықтықта жататыны және оның бинормальға проекциясы нөлге тең екендігін көреміз.

Толық $\overline{\omega}$ үдеудің құрамалары: $\overline{\omega}_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \overline{\tau} = \dot{v}_{\tau} \overline{\tau}$ векторы траекториясының жанамасымен бағытталған, оны нүктенің **жанама үдеуі** деп, алтраекторияның нормалімен бағытталған $\overline{\omega}_n = \frac{v^2}{\rho} \overline{n}$ векторын нүктенің **нормаль үдеуі** деп атайды.

Олай болса, нүктенің толық үдеуін былайша жазуға болады:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_{\tau} + \overline{\omega}_n. \quad (7.28)$$

Үдеу векторының табиғи өстердегі проекциялары былайша жазылады:

$$\omega_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}, \omega_n = \frac{v^2}{\rho}, \omega_b = 0. \quad (7.29)$$

Толық үдеудің модулі төмендегі формуламен анықталады:

$$\omega = \sqrt{\omega_{\tau}^2 + \omega_n^2}. \quad (7.30)$$

Нормаль үдеудің шамасы әр уақытта оң сан болғандықтан, толық $\overline{\omega}$ үдеу траекторияның қисықтық центріне қарай бағытталғандықтан, оны **центрге тартқыш үдеу** деп те атайды. Толық үдеудің бағыты оның бас нормальдың оң бағытымен жасайтын, α бұрышы арқылы анықталады:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_{\tau}}{\omega_n}, \quad (7.31)$$

мұндағы α – толық және нормаль үдеулердің арасындағы бұрыш.

Осы формуладан жанама үдеу $\overline{\omega}_\tau$ -дың таңбасына қарап, яғни жылдамдық модулі ν -ның өсуіне не кемуіне байланысты, толық үдеудің бас нормальдан қозғалыстың бағытына қарай, не оған қарсы бағытқа ауытқитынын көреміз. Егер $\omega_\tau > 0$ (жылдамдықтың шамасы уақыт өткен сайын өсіп отыратын) болса, онда жанама үдеу $\overline{\omega}_\tau$ де қозғалыстың бағытына қарай бағытталады. Мұндай қозғалыс **үдемелі қозғалыс** деп аталады. Егер $\omega_\tau \neq 0$ болса, онда қозғалыс қисық сызықты қозғалыс, ал $\omega_n = 0$ ($\rho = \infty$) болса, онда ол **түзу сызықты қозғалыс** болады. Тек жеке уақыт кезеңінде ғана $\omega_n = 0$ болса, онда сол сәтте қозғалушы нүкте траекторияның кері иілу нүктесінде болғаны, не сол сәтте нүктенің жылдамдығы нөлге тең болғаны.

Егер $\omega_\tau < 0$ (жылдамдық шамасы қозғалыс кезінде кеміп отыратын) болса, $\overline{\omega}_\tau$ және $\overline{\omega}$ векторлары қозғалысқа қарсы бағытталады, ал қозғалыс **баяулаған қозғалыс** деп аталады.

Егер барлық уақытта да $\omega_\tau = 0$ жылдамдықтың шамасы тұрақты, яғни $\nu = const$ болса, қозғалыс **бірқалыпты қозғалыс** деп аталады. Егер тек қана жеке уақыт кезеңі үшін $\omega_\tau = 0$ болса, онда алгебралық жылдамдық өзінің экстремалды мәнін қабылдағаны. Ал барлық уақытта да $\omega_\tau = \omega_n = 0$ болса, онда нүкте бірқалыпты түзу сызықты қозғалыста болғаны.

7.4. Нүктенің үдеуге байланысты қозғалыс түрлері

Траекторияның түріне қарай нүкте қозғалысы екі топқа бөлінеді. Қозғалыс кезінде түзу сызық сызатын нүктені түзу сызықты қозғалыс жасайды дейміз, траекториясы қисық сызық түрінде болып келетін нүктені екінші топқа жатқызамыз. Нүкте жылдамдығының өзгеруіне қарап, бұл екі топтағы нүкте қозғалыстарының әрқайсысын әр түрге бөліп атаймыз. Алдымен нүктенің түзу сызықты қозғалысына жеке тоқтап өтейік.

1. Түзу сызықты бірқалыпты қозғалыс. Түзудің қисықтық радиусы $\rho = \infty$ болғандықтан, түзу сызықты қозғалыстағы нүктенің нормалі және нормаль үдеулері нөлге тең болады.

Нүктенің жылдамдығы тұрақты, түзу сызықты қозғалысы **түзу сызықты бірқалыпты қозғалыс** деп аталады. Мұндай қозғалыстың

толық үдеуі нөлге тең болады да, қозғалыс кезіндегі уақыттардың бәрінде жылдамдық векторы модулін өзгертпей сақтайды.

Түзу сызықты, бірқалыпты қозғалысты сипаттайтын формулалар мынадай:

$$\varpi_{\tau} = 0, \quad v = \text{const}, \quad s = s_0 + vt. \quad (7.32)$$

2. Түзу сызықты бірқалыпты айнымалы қозғалыс. Үдеуі тұрақты нүктенің түзу сызықты қозғалысы – *бірқалыпты айнымалы қозғалысы* деп аталады, мұндай қозғалысты сипаттайтын формулалар элементар физикадан белгілі:

$$\varpi_{\tau} = \text{const}, \quad v = v_0 + \varpi t, \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{\varpi t^2}{2}. \quad (7.33)$$

3. Қисық сызықты бірқалыпты қозғалыс. Нүктенің қисық сызықты қозғалысында $v = \text{const}$ болса, онда ол *бірқалыпты қисық сызықты қозғалыс* деп аталады. Демек, бірқалыпты қисық сызықты қозғалыс кезінде нүктенің жанама үдеуі нөлге тең, толық үдеуі өзінің нормаль құраушысына тең болып келеді. Қисық сызықты бірқалыпты қозғалысты сипаттайтын формулалар мына түрде жазылады:

$$v = \text{const}, \quad \varpi_{\tau} = 0, \quad \varpi_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Нүкте жылдамдығын өрнектейтін теңдеуді интегралдау арқылы бірқалыпты бірқалыпты қисық сызықты қозғалыс заңын табамыз:

$$s = s_0 + vt. \quad (7.34)$$

4. Қисық сызықты бірқалыпты айнымалы қозғалыс. Нүктенің жанама үдеуі қозғалыс кезінде үнемі тұрақты $\varpi_{\tau} = \text{const}$ болса, онда қисық сызықты қозғалыс *бірқалыпты айнымалы қозғалыс* деп аталады. Қисық сызықты бірқалыпты айнымалы қозғалысты сипаттайтын формула мынадай:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\varpi t^2}{2}. \quad (7.35)$$

5. Қисық сызықты қозғалыстың жалпы жағдайы. Үдеу векторы жылдамдық векторының өзгеру тездігін анықтайды. Ол жалпы жағдайда жанама және нормаль құраушыларға жіктеледі. Жанама үдеу жылдамдық векторының сан мәнінің өзгеруін, ал нормаль үдеу жылдамдық бағытының өзгеруін сипаттайды. Жалпы жағдайда, жылдамдықтың өзгеруі толығынан қарастырылатындықтан, $\varpi_\tau \neq 0$, $\varpi_n \neq 0$ болып келеді.

Жалпы жағдайдағы қисық сызықты қозғалыс үдемелі және кемімелі деген екі түрге бөлінеді. Үдемелі қозғалыс кезінде ϖ_τ және v_τ шамаларының таңбалары бірдей, ал кемімелі қозғалыс кезінде бұлардың таңбалары қарама-қарсы болып келеді. Басқаша айтқанда, үдемелі қозғалыс кезінде жанама үдеу векторы жылдамдық векторымен бірдей бір жаққа қарай бағытталады, ал кемімелі қозғалыс кезінде ол жылдамдық векторына қарама-қарсы бағытта болады. $\varpi_n = \frac{v^2}{\rho}$ оң шама болғандықтан, нормаль үдеу бас нормальмен бірдей бағытталады. Нормаль үдеу траекторияның қисықтық центріне қарай бағытталуына байланысты, ол кейде **центрге ұмтылғыш үдеу** деп те аталады. Осыдан бұрын айтылған үдеу векторының үнемі траекторияның ойыс жағына қарай бағытталатындығын нормаль үдеу туралы берілген осы түсінік айқындай түседі.

7.5. Есептерді шешудің әдістемесі

7.1-мысал. Нүктенің вектор түрінде $\vec{r} = \vec{i} \cdot 4 \cdot \sin t + \vec{j} \cdot 3 \cdot \cos t^2$ қозғалыс теңдеуі бойынша, оның траектория теңдеуін, жылдамдығын және үдеуін анықтаңыз.

Шешуі: Радиус-векторының координат өстеріне проекциясы:

$$\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y,$$

мұндағы

$$x = 4 \cdot \sin t^2, \quad y = 3 \cdot \cos t^2.$$

Енді нүктенің траекториясын анықтау үшін жоғарыда алынған теңдеуден уақытты жоямыз, ол үшін теңдеудің екеуінен де тригано-

метриялық функцияларды өрнектеп, одан кейін $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ теңдеуін пайдалансақ, сонда

$$\frac{x}{4} = \sin t^2, \quad \frac{y}{3} = \cos t^2,$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \sin^2 t^2, \quad \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \cos^2 t^2,$$

Теңдеулердің екі жағын бір-біріне қосатын болсақ,

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \quad \text{немесе} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

яғни анықталған траектория – эллипс.

Нүктенің жылдамдығы мен үдеуінің координат өстеріндегі проекцияларын анықтаймыз:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 8t \cos t^2, \quad \varpi_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 8 \cos t^2 - 16t^2 \sin t^2,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -6t \sin t^2, \quad \varpi_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -6 \sin t^2 - 12t^2 \cos t^2,$$

Нүктенің жылдамдық пен үдеуі векторларының модулін анықтаймыз:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{64t^2 \cos^2 t^2 + 36t^2 \sin^2 t^2} = \\ &= t\sqrt{64\cos^2 t^2 + 36\sin^2 t^2} \quad \text{м/с}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varpi &= \sqrt{\varpi_x^2 + \varpi_y^2} = \\ &= \sqrt{64\cos^2 t^2 + 36\sin^2 t^2 - 56t^2 \sin 2t^2 + 4t^4(64\cos^2 t^2 + 36\sin^2 t^2)} \quad \text{м/с}^2. \end{aligned}$$

Демек, нүктенің траекториясы – эллипс; жылдамдығы мен үдеуі айнымалы:

$$v = t\sqrt{64\cos^2 t^2 + 36\sin^2 t^2} \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{64\cos^2 t^2 + 36\sin^2 t^2 - 56t^2 \sin 2t^2 + 4t^4(64\cos^2 t^2 + 36\sin^2 t^2)} \text{ м/с}^2.$$

7.2-мысал. Нүкте қозғалысы $x = 8t - 4t^2$, $y = 6t - 3t^2$ теңдеулермен берілген (координаттар – метрмен (m), уақыт – секундпен (s) өлшенеді). Нүктенің жылдамдығы мен үдеуін есептеңдер.

Шешуі: Нүкте жылдамдығының өстерге проекцияларын (7.10) формуланы қолданып есептейміз:

$$v_x = \dot{x} = 8(1-t), \quad v_y = \dot{y} = 6(1-t).$$

Жылдамдық модулін (7.11) формуладан анықтаймыз:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10|1-t|.$$

(7.14) формуламен нүкте үдеуінің өстерге проекцияларын есептейміз:

$$a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x = -8 \text{ см/с}^2, \quad a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y = -6 \text{ см/с}^2$$

Үдеу модулін (7.15) формуланы қолданып есептейміз:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10 \text{ см/с}^2.$$

7.3-мысал. Нүктенің Oxy жазықтығындағы қозғалыс теңдеулері $x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3$, $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$ берілген (x, y – сантиметрмен (cm), t – секундпен (s) өлшенеді). Уақыттың $t_1 = 1 \text{ с}$ мезетіндегі нүктенің жылдамдығы мен үдеуін анықтаңыз.

Шешуі: Алдымен нүкте жылдамдығының координат өстеріндегі проекцияларын анықтаймыз:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right).$$

Уақыт $t_1 = 1 \text{ c}$ болғандағы

$$v_x = 1,11 \text{ см/с}, \quad v_y = 0,73 \text{ см/с}.$$

Нүкте жылдамдығының модулі келесі формула арқылы

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

анықталып, оның $t_1 = 1 \text{ c}$ болған мезгілдегі шамасы

$$v = 1,33 \text{ см/с}$$

тең болады.

Осыған сәйкес нүкте үдеуін анықтаймыз:

$$\varpi_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \quad \varpi_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\pi^2}{32} \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right),$$

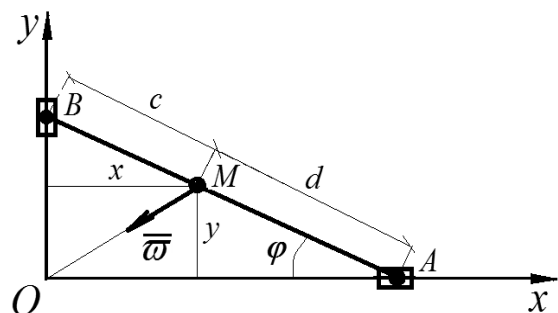
$$\varpi = \sqrt{\varpi_x^2 + \varpi_y^2},$$

және $t_1 = 1 \text{ c}$ болғанда,

$$\varpi_x = 0,87 \text{ см/с}^2, \quad \varpi_y = 0,12 \text{ см/с}^2, \quad \varpi = 0,88 \text{ см/с}^2.$$

7.4-мысал. AB кесіндісі (7.9-сурет) өзінің A және B ұштарымен біріне-бірі перпендикуляр екі бағыттаушының бойымен қозғалады да, φ – бұрышы уақыттың өтуіне қарай $\varphi = \omega t$ заңдылығына сәйкес өзгеріп отырады. Мұндағы ω – кез келген тұрақты сан. AB кесіндісінде жатқан M нүктесінің қозғалыс теңдеулерін, оның траекториясын және нүкте жылдамдығы мен үдеуін анықтаңыз.

Шешуі: Егер тұрақты координат жүйесінің бас нүктесін, A және B нүктелері жатқан бағыттаушы түзулердің қиылысқан O нүктесінде алсақ, онда M нүктесінің координаттары:



7.9-сурет

$$x = c \cdot \cos \varphi = c \cdot \cos \omega t,$$

$$y = d \cdot \sin \varphi = d \cdot \sin \omega t,$$

яғни M нүктесінің параметрлік теңдеулері болып табылады. Бұл теңдеулерді кейбір түрлендірулерден кейін:

$$\frac{x^2}{c^2} = \cos^2 \omega t, \quad \frac{y^2}{d^2} = \sin^2 \omega t$$

мүшелеп қоссақ:

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

уақытқа тәуелсіз, ізделіп отырған M нүктесінің траекториясының эллипс екенін анықтаймыз.

Жылдамдық векторының \vec{v} координат өстеріндегі проекциялары:

$$v_x = \dot{x} = -c \cdot \omega \cdot \sin \omega t, \quad v_y = \dot{y} = d \cdot \omega \cdot \cos \omega t.$$

Оның абсолют шамасы:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{c^2 \sin^2 \omega t + d^2 \cos^2 \omega t}.$$

Жылдамдақтың бағыттаушы косинустары:

$$\cos(\vec{v}, x) = -\frac{c \cdot \sin \omega t}{v}; \quad \cos(\vec{v}, y) = \frac{d \cdot \cos \omega t}{v}.$$

Үдеу векторының \vec{w} координат өстеріндегі проекцияларымен оның абсолют шамасы:

$$w_x = \ddot{x} = -c \omega^2 \cdot \cos \omega t = -\omega^2 \cdot x,$$

$$w_y = \ddot{y} = -d \omega^2 \cdot \sin \omega t = -\omega^2 \cdot y,$$

$$\varpi = \sqrt{\varpi_x^2 + \varpi_y^2} = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Мұндағы $\sqrt{x^2 + y^2} = OM$, M нүктесінің O нүктесіне қатысты \vec{r} радиус-вектордың модуліне тең, яғни

$$\varpi = \omega^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r.$$

Үдеудің бағыттаушы косинустары:

$$\cos(\hat{\varpi}, x) = \frac{\varpi_x}{\varpi} = -\frac{x}{r}, \quad \cos(\hat{\varpi}, y) = \frac{\varpi_y}{\varpi} = -\frac{y}{r}.$$

Үдеудің бағыттаушы косинустарын \vec{r} радиус-вектордың бағыттаушы косинустарымен

$$\cos(\hat{r}, x) = \frac{r_x}{r} = \frac{x}{r}, \quad \cos(\hat{r}, y) = \frac{r_y}{r} = \frac{y}{r}$$

салыстыра отырып, M нүктесінің үдеу векторы осы нүктенің радиус-векторына қарама-қарсы бағытталған деген шешімге келеміз.

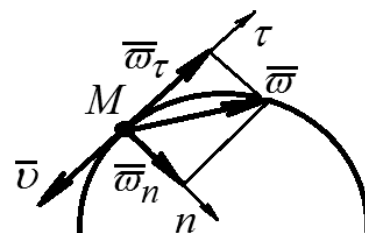
Сонымен, M нүктесінің траекториясы – эллипс, жылдамдығы:

$$v = \omega \sqrt{c^2 \sin^2 \omega t + d^2 \cos^2 \omega t}, \quad \text{үдеуі } \varpi = \omega^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r.$$

7.5-мысал. Радиусы $R=2$ м шеңбермен нүкте $S=(t^3-5t)$ заңдылығымен қозғалады (7.10-сурет). $t=1$ с мезетінде нүктенің жылдамдығы мен толық үдеуін анықтаңыз.

Шешуі: M нүктесінің жылдамдықтың өзгеру заңын табайық: $v = \dot{s} = 3t^2 - 5$. $t=1$ с мезетінде M нүктенің жылдамдығы: $v = -2$ см/с. $v < 0$ болғандықтан, оның бағыты жанама $\vec{\tau}$ ортына қарама-қарсы болады.

M нүктесінің үдеуін анықтау үшін оны жанама және нормаль құрушыларға жіктейміз:



7.10-сурет

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_n + \bar{\omega}_\tau.$$

Жанама үдеудің өзгеру заңы:

$$\omega_\tau = \dot{s} = 6t.$$

$t = 1 \text{ c}$ уақыт мезетінде $\omega_\tau = 6 \text{ м/с}^2$. $\omega_\tau > 0$ болғандықтан, тангенсаль үдеудің бағыты $\bar{\tau}$ жанама ортына бағыттас.

Нормаль үдеудің өзгеру заңы:

$$\omega_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(3t^2 - 5)^2}{2}.$$

$t = 1 \text{ c}$ уақыт мезетінде $\omega_n = 2 \text{ м/с}^2$, $\bar{\omega}_n$ - траекториянының ойыс жағына қарай (қисықтық радиус бойымен) бағытталған.

7.6-мысал. Бастапқы жылдамдығы $v_0 = 0,5 \text{ м/с}$ нүкте радиусы $R = 2 \text{ м}$ шеңбер бойымен бірқалыпты үдемелі қозғала бастайды. $t_1 = 30 \text{ c}$ уақыт аралығында $s = 165 \text{ м}$ жолды жүріп өтеді. $t_2 = 20 \text{ c}$ уақыт мезетіндегі v , ω_n , ω_τ , ω шамаларын анықтаңыз.

Шешуі. Қозғалыс бірқалыпты үдемелі болғандықтан, $a_\tau = \text{const}$. Бірқалыпты үдемелі қозғалыс үшін анықталған қатынастарды қолданамыз:

$$\begin{cases} v = v_0 + \omega_\tau t; \\ s = v_0 t + \frac{\omega_\tau t^2}{2} \end{cases}$$

Екінші теңдеуден жанама үдеуін табамыз:

$$\omega_\tau = \frac{2(s - v_0 t_1)}{t_1^2} = 0,33 \text{ м/с}^2.$$

Бірінші теңдеуден $t_2 = 20 \text{ c}$ уақыт мезетіндегі нүктенің жылдамдығын табамыз:

$$v = v_0 + \omega_\tau t_2 = 7,2 \text{ м/с}.$$

Жылдамдықтың табылған мәнін қолданып, $t_2 = 20$ с уақыт мезетіндегі нормаль үдеуін табамыз:

$$\varpi_n = \frac{v^2}{R} = 25,7 \text{ м/с}^2.$$

Сонда толық үдеу

$$\varpi = \sqrt{\varpi_n^2 + \varpi_\tau^2} = 25,68 \text{ м/с}^2.$$

болады.

Жаттығу есептері

1-есеп. Нүктенің векторлық тәсілмен берілген қозғалыс теңдеулерінен оның траекториясын, жылдамдығын және үдеуін анықтаңыз.

- 1) $\vec{r} = 2t\vec{i} + (2 - 5t)\vec{j}$;
- 2) $\vec{r} = 3 \cos \frac{\pi t}{6} \vec{i} + \left(1 + 3 \sin \frac{\pi t}{6}\right) \vec{j}$;
- 3) $\vec{r} = (2 + 3t)\vec{i} + (3 - 2t)\vec{j} + (3 + t)\vec{k}$;
- 4) $\vec{r} = \left(2 + \sin \frac{\pi t}{3}\right) \vec{i} + \left(1 + 2 \cos \frac{\pi t}{3}\right) \vec{j}$.

2-есеп. Нүктенің қозғалыс теңдеулері бойынша оның траекториясының, жылдамдығының, үдеуінің теңдеулерін анықтаңыз және кинематикалық сипаттамаларының бастапқы уақыттағы ($t = 0$) мәндерін анықтаңыз.

- 1) $x = 4 \sin \frac{\pi}{6} t, \quad y = 6 \cos \frac{\pi}{6} t$;
- 2) $x = t^3 + 2, \quad y = 3 - t^3$;
- 3) $x = t^2 + 2t, \quad y = 3t - 5t^3$;
- 4) $x = 2 + \sin t^2, \quad y = 3 + \cos t^2$.

3-есеп. Декарттық координат жүйесінде берілген

- 1) $x = 6t^2 + 7, \quad y = 8t^2 + 3$;
- 2) $x = 2 \sin 2t, \quad y = 2 \cos 2t$;
- 3) $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$;
- 3) $x = 1 - t^2, \quad y = t^2 - 1$.

қозғалыс теңдеулерінен траектория теңдеуін, нүктенің жылдамдығын, жанама, нормаль толық үдеулерін және траекторияның қисықтық радиусын анықтаңыз.

Қайталау сұрақтары:

1. Материялық нүкте дегеніміз не?
2. Нүкте қозғалысының кинематикалық сипаттамалары туралы түсінік беріңіз.
3. Нүкте қозғалысы қандай тәсілдермен беріледі және олардың қандай ерекшеліктері бар?
4. Қозғалыстағы нүктенің радиус-векторы мен жылдамдық векторының арасында қандай байланыс бар?
5. Нүктенің қисық сызықты қозғалысында оның жылдамдығының векторы траекторияға қатысты қалай бағытталады?
6. Нүкте қозғалысы координаттық тәсілмен берілгенде, оның траекториясы қалай анықталады?
7. Жылдамдық векторының қозғалмайтын декарттық координат өстеріндегі проекциялары неге тең?
8. Қозғалыстағы нүктенің радиус-векторы мен үдеу векторының арасында қандай тәуелділік бар?
9. Жылдамдық векторының таңбасына байланысты қандай тұжырым жасауға болады?
10. Үдеу векторының қозғалмайтын декарттық координат өстеріндегі (координат өстеріне) проекциялары неге тең?
11. Траектория жанамасының бірлік векторының бағытына байланысты қандай тұжырым жасалады?
12. Табиғи өстер жүйесі туралы түсінік беріңіз.
13. Толық үдеудің құраушылары арқылы нүкте қозғалысына қандай талдаулар жасауға болады?
14. Үдеу векторының қозғалмайтын табиғи өстердегі проекциялары неге тең?
15. Қандай жағдайда нүктенің жанама үдеуі нөлге тең? Қандай жағдайда нүктенің нормаль үдеуі нөлге тең?
16. Толық үдеу векторы орналасқан жазықтық қалай аталады?
17. Нүкте қозғалысы координат жүйесінсіз берілуі мүмкін бе?
18. Траектория қисықтығы қалай анықталады?

19. Нүктенің қисық сызықты қозғалысы кезінде оның нормаль үдеуі нөлге тең болуы мүмкін бе?
20. Нүктенің қандай қозғалысы бірқалыпты және бірқалыпты айнымалы деп аталады?
21. Бірқалыпты айнымалы қозғалыстағы жүрілген жолды анықтайтын өрнекті жазып көрсетіңіз.
22. Қандай қозғалыста нүктенің жылдамдығы мен үдеуі бір-біріне тікбұрыш жасай бағытталады?
23. Қандай қозғалыста нүктенің жылдамдығы мен үдеуі бір түзу бойымен бағытталады?

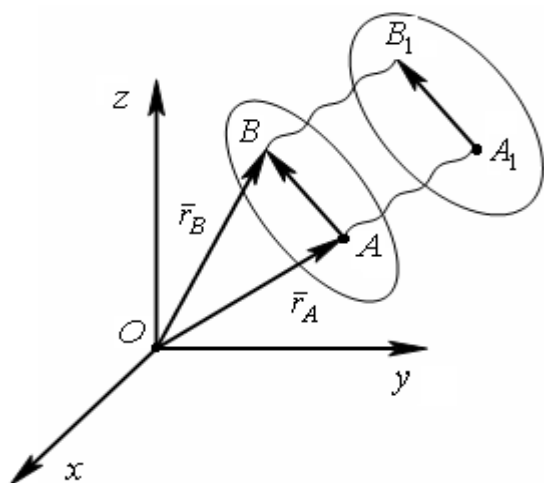
8-тарау. ҚАТТЫ ДЕНЕ КИНЕМАТИКАСЫ

Қатты дене қозғалғанда, оның кейбір нүктелері, жалпы жағдайда, әртүрлі траекториямен қозғалады және уақыттың әрбір мезгілінде жылдамдық пен үдеулері әртүрлі болады. Сонымен қатар қатты дененің барлық нүктелеріне ортақ дененің қозғалысын сипаттай-тын шамалар да (кинематикалық сипаттамалар) болады. Қатты дене кинематикасының негізгі мақсаты – дене қозғалысының берілу тәсілін анықтау және денеге тән кинематикалық сипаттамаларды зерттеу, яғни дене нүктелерінің траекторияларын, жылдамдығы мен үдеулерін анықтау.

8.1. Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы

Қатты *дененің ілгерілемелі қозғалысы* деп дененің кез келген екі нүктесін қосатын түзу өзіне-өзі параллель болып қозғалатын дене қозғалысын айтады.

Теорема. Ілгерілемелі қозғалыстағы дененің барлық нүктелері конгруэнтті траекториялар сызып, кез келген мезетте бір бағытта, бірдей жылдамдықпен және бірдей үдеумен қозғалады.



8.1-сурет

Дәлелдеуі: $Oxyz$ координат жүйесіне қатысты ілгерілемелі қозғалатын денені қарастырайық (8.1-сурет). Дененің кез келген екі A және B нүктелерінің t уақыт мезетіндегі жағдайлары \vec{r}_A , \vec{r}_B радиус векторларымен анықталсын. Осы нүктелерді қосатын \overline{AB} векторын жүргізейік. Сонда:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}. \quad (8.1)$$

AB -ның ұзындығы абсолют қатты дененің нүктелерінің арақашықтығы болғандықтан өзгермейді. Дене ілгерілемелі қозғалыста болғандықтан, оның бағыты да өзгермейді. Сонымен, дене

қозғалысында \overline{AB} векторы өзгермейді. Сондықтан дененің B нүктесінің траекториясын A нүктесінің траекториясынан оның барлық нүктелерін тұрақты \overline{AB} векторына жылжыта отырып тұрғызуға болады. Егер A мен B нүктелерінің траекторияларын беттестірсе, олар дәлме-дәл келеді, яғни олар – конгруэнтті сызықтар.

B нүктесінің жылдамдығын анықтау үшін (8.1) формуласының екі жағын уақыт бойынша дифференциалдайық:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}. \quad (8.2)$$

Модулі мен бағыты өзгермейтін тұрақты вектордан алынған туынды нөлге тең $\frac{d(\overline{AB})}{dt} = 0$, сондықтан

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} \text{ немесе } \bar{v}_B = \bar{v}_A, \quad (8.3)$$

яғни ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дене нүктелерінің жылдамдықтары өзара тең болады.

Алынған қатынастың екі жағын уақыт бойынша дифференциалдап,

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} \text{ немесе } \bar{\omega}_B = \bar{\omega}_A \quad (8.4)$$

екенін анықтаймыз, яғни нүктелердің үдеулері де өзара тең болады.

Қарастырылған A мен B нүктелері кез келген нүктелер болғандықтан және алынған нәтижелер бойынша, қатты дененің барлық нүктелерінің траекториялары конгруэнтті, ал жылдамдықтары мен үдеулері уақыттың кез келген мезгілінде өзара тең болады. Теорема дәлелденді.

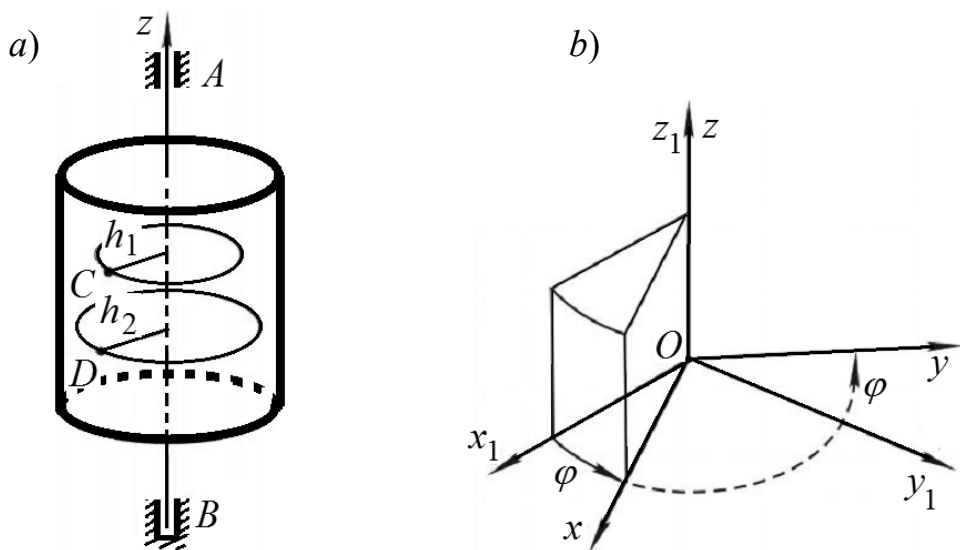
Сонымен, ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің қозғалысын оның кез келген бір нүктесінің қозғалысымен толық сипаттауға болады. Сондықтан дененің ілгерілемелі қозғалысын зерттеу оның бір нүктесінің қозғалысын зерттеумен парапар.

8.2. Қатты дененің айналмалы қозғалысы

Қозғалмайтын екі нүктесі бар абсолют қатты дене қозғалысы қозғалмайтын өсті айнала қозғалу деп аталады. Қозғалмайтын A, B нүктелері арқылы өтетін түзуді **дененің айналу өсі**, ал оған қатысты дененің қозғалысын **айналмалы қозғалыс** деп атайды. Дененің AB өсі бойындағы нүктелері қозғалмайды, ал басқа нүктелері радиусы осы нүктелерден айналу өсіне түсірілген перпендикулярдың ұзындығына тең шеңберлер сызады. (8.2, *a*-сурет). Мысалы, кез келген C және D нүктелері радиустары тиісінше h_1 және h_2 шеңберлер сызады. Шеңберлердің центрі айналу өсінде жатып, шеңберлер жазықтықтары өске перпендикуляр орналасады.

Айналған дененің қозғалысын зерттеу үшін екі координат жүйесін алайық: $Oxyz$ қозғалмайтын координат жүйесі – $Ox_1y_1z_1$ денеге бекітілген және денемен бірге қозғалатын координат жүйесі (8.2, *b*-сурет). Мұндағы Oz, Oz_1 өстері дененің айналу өсімен бірігіп келсін делік. Дененің кез келген мезеттегі жағдайын xOy, x_1Oy_1 жазықтықтарының арасындағы φ бұрышы арқылы толығымен анықтауға болады. Егер осы бұрыштың уақытпен байланысы $\varphi(t)$ анықталған функция болса, дененің қозғалыс теңдеуі берілген деп есептеледі

$$\varphi = \varphi(t). \quad (8.5)$$



8.2-сурет

Уақыт функциясы ретінде берілген айналу бұрышы $\varphi = \varphi(t)$ қатты дененің айналу заңы немесе айналу қозғалысының теңдеуі деп аталады.

Айналған дененің орнын бір мәнді анықтау үшін, егер айналу өсінің оң бағыттағы ұшынан қарағанда дене сағат тілінің қозғалысына қарсы бағытқа айналса, айналу бұрышын оң таңбалы деп есептейміз. Ал егер дене сағат тілі қозғалысымен бір бағытта қозғалса, айналу бұрышы теріс таңбалы деп саналады. Айналу бұрышы радианмен өлшенеді.

Бұрыштық жылдамдықпен бұрыштық үдеу. Айналмалы қозғалысты сипаттайтын негізгі кинематикалық шамалар – дененің бұрыштық жылдамдығымен бұрыштық үдеуі.

Қозғалмайтын өсті айналып қозғалатын қатты дененің бұрыштық жылдамдығы деп айналу бұрышынан уақыт бойынша алынған бірінші туындыға тең шаманы айтамыз:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (8.6)$$

z индексі айналмалы қозғалыстың z өсінің төңірегінде болатынын көрсетеді.

Бұрыштық жылдамдықтың өлшем бірлігі (рад/с) $[\omega] = \frac{рад}{с} = \frac{1}{с} = с^{-1}$.

Техникада бірқалыпты айналмалы қозғалыстың бұрыштық жылдамдығын бір минуттағы айналым санымен есептейді: $[n] = \frac{об}{мин}$.

Бұрыштық жылдамдық пен айналым саны арасында мынадай байланыс бар: $\omega = \frac{2\pi n}{мин} = \frac{\pi n}{60} \left(\frac{1}{с} \right)$, мұндағы n – айналым саны.

Дененің бұрыштық үдеуі деп бұрыштық жылдамдықтан уақыт бойынша алынған бірінші туындыға тең немесе айналу бұрышынан уақыт бойынша алынған екінші туындыға тең шаманы айтады:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (8.7)$$

Бұрыштық үдеудің өлшемі бірлігі – $(рад/с^2)$ $[\varepsilon_z] = \frac{рад}{с^2} = \frac{1}{с^2} = с^{-2}$.

Егер ω_z , ε_z таңбалы бірдей болса, дененің айналуы үдемелі, ал егер таңбалары әртүрлі болса, дене айналуы кемімелі болады.

Дененің бұрыштық жылдамдығы $\omega_z = const$ тұрақты шама болса, дене **бірқалыпты айналмалы қозғалады**. Бұл жағдайда $\varepsilon = 0$.

Егер $t_0 = 0$ болғанда, $\varphi = \varphi_0$ болса, (8.6) өрнектен $d\varphi = \omega_z dt$ тепе-теңдігін алып, екі жағын да интегралдасақ:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} dy = \omega_z \int_0^t dt ,$$

мынадай формула шығады:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_z t \text{ немесе } \varphi = \varphi_0 + \omega_z t . \quad (8.8)$$

(8.8) **бірқалыпты айналмалы қозғалыстың теңдеуі**.

Дененің айналысы кезінде оның бұрыштық үдеуі $\varepsilon_z = const$ тұрақты шама болса, онда дене **бірқалыпты айнымалы айналып қозғалады**, яғни не бірқалыпты үдей айналады, не бірқалыпты кеми айналады.

Бұрыштық үдеу анықтамасынан:

$$d\omega_z = \varepsilon_z dt$$

тең.

$t_0 = 0$ болғанда, $\omega_z = \omega_{z0}$ деп алып, жоғарыдағы тепе-теңдікті интегралдайық:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega_z = \varepsilon_z \int_0^t dt ,$$

нәтижесінде, мынадай:

$$\omega_z - \omega_{z0} = \varepsilon_z t$$

немесе

$$\omega_z = \omega_{z0} + \varepsilon_z t \quad (8.9)$$

формула аламыз.

(8.9) өрнегі – дененің бірқалыпты айнымалы айналу қозғалысының бұрыштық жылдамдығын анықтайтын формула. Дененің айтылған қозғалысының теңдеуін алу үшін, (8.9) теңдеуін дифференциалдық түрде жазайық:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_{z_0} + \varepsilon_z t$$

немесе

$$d\varphi = \omega_{z_0} dt + \varepsilon_z t dt.$$

Бұны интегралдай отырып:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_{z_0} \int_0^t dt + \varepsilon_z \int_0^t t dt$$

айналу бұрышын өрнектейтін формула аламыз:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_{z_0} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}$$

немесе

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{z_0} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}. \quad (8.10)$$

(8.10) бірқалыпты айнымалы айналатын дене қозғалысының теңдеуі деп аталады.

8.3. Бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеудің векторлары

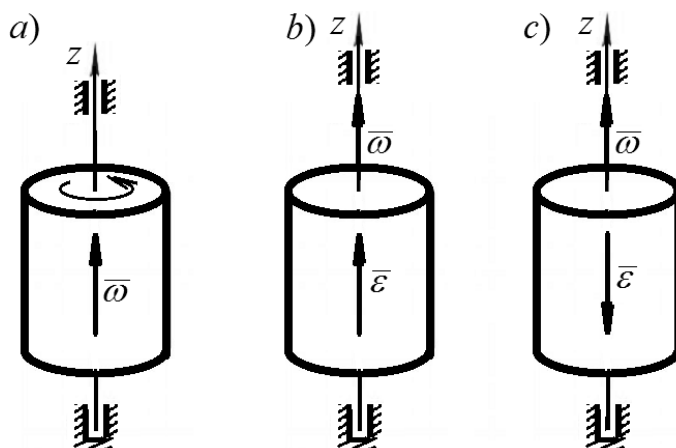
Қатты дене кинематикасын зерттеуге бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеудің векторларын енгізген орынды.

Қозғалмайтын өс төңірегінде айналатын қатты дененің $\bar{\omega}$ бұрыштық жылдамдағының векторы деп модулі ω дененің бұрылу бұрышынан уақыт бойынша алынған туындысының абсолют шамасна тең векторды айтамыз. Бұрыштық жылдамдық векторы

айналу өсі бойымен, дененің сағат тілі жүрісіне қарсы айналатыны көрінетін жаққа бағытталады (8.3, *a*-сурет).

\bar{k} бірлік векторын пайдаланып, бұрыштық жылдамдық векторын жазайық

$$\bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \bar{k} = \omega_z \bar{k}.$$



8.3-сурет

Бұрыштық үдеу векторы дегеніміз – бұрыштық жылдамдық векторынан уақыт бойынша алынған туындысына тең вектор, яғни

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} \bar{k} = \varepsilon_z \bar{k}.$$

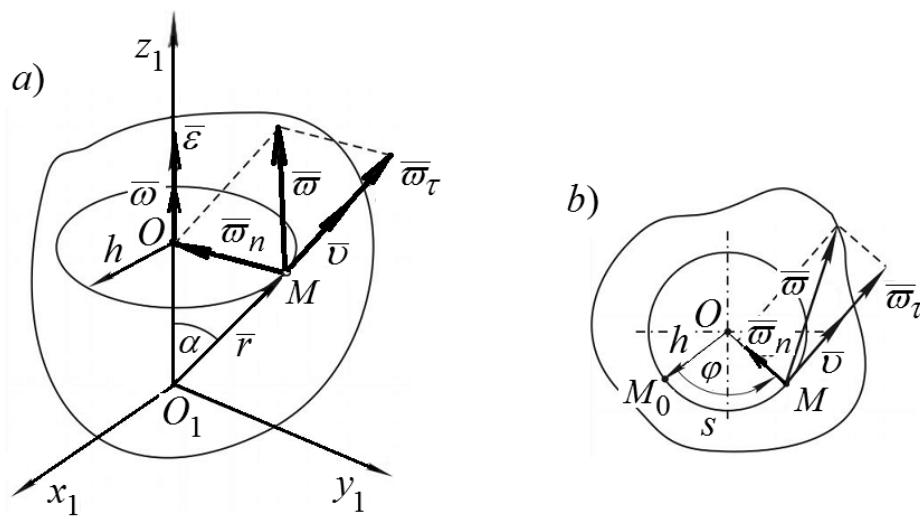
Бұдан бұрыштық үдеу векторы $\bar{\varepsilon}$ бұрыштық жылдамдық векторы $\bar{\omega}$ сияқты айналу өсі бойымен бағытталады (8.3, *b*, *c*-сурет).

8.3, *b*-суретінде үдемелі, ал 8.3, *c*-суретте кемімелі айналма қозғалыс көрсетілген.

8.4. Қозғалмайтын өсті айналатын қатты дене нүктелерінің жылдамдықтарымен үдеулері

Қозғалмайтын вертикаль өстің төңірегінде айналатын қатты дененің жылдамдығы $\bar{\omega}$, үдеуі $\bar{\varepsilon}$ делік. Енді осы дененің кез келген *M* нүктесінің жылдамдығы мен үдеуін анықтайық (8.4, *a*-сурет).

Айналу O_1z_1 өсінің оған перпендикуляр және M нүктесі арқылы өтетін жазықтықпен қиылысу нүктесін O деп белгілейік. Онда M нүктесінің траекториясы жоғарыда айтылған жазықтықта жататын, радиусы $OM = h$ шеңбер болады (8.4, *b*-сурет). Шеңбер жатқан жазықтық – $x_1O_1y_1$ жазықтығына параллель. Дене қозғала басталған мезетте M нүктесі шеңбердің M_0 нүктесінде болған деп, осы нүктені санақ жүйесінің басты нүктесі дей отырып, доғалық координат енгізейік. Доғалық координаттың оң есептеу бағыты φ айналу бұрышының оң бағытындай болсын делік. Онда қозғалыстағы M нүктесінің орнын M_0M доғасымен анықтауға болады, $s = M_0M$.



8.4-сурет

Доғаның шамасын белгілі формуланы қолданып анықтайық:

$$S = h\varphi, \quad (8.11)$$

мұндағы $h = OM$ – нүктенің радиусы.

Осы теңдеуге (7.19) және (7.20) формулаларын пайдаланып, нүкте жылдамдығының модулі есептеледі:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = h \frac{d\varphi}{dt} = h\omega, \quad (8.12)$$

мұндағы ω – дененің бұрыштық жылдамдығының модулі.

M нүктесінде траекторияға жүргізілген жанаманың $\bar{\tau}$ орты доғалық координаттың өсу бағытымен бағыттас, ал нормальдың \bar{n} орты, әдеттегідей, траектория қисықтығының центріне, яғни O нүктесіне бағытталған. Сонда M нүктесінің жылдамдық векторын анықтайтын мынадай өрнек алынады:

$$\bar{v} = v\bar{\tau} = h\omega\bar{\tau}, \quad (8.13)$$

яғни нүктенің жылдамдық векторы \bar{v} траекторияның M нүктесіндегі жанамада жатады, бағыты дененің айналу бағытымен бағыттас болады.

(7.29) формулалары нүктенің үдеу векторының табиғи өстегі проекцияларын анықтайтын өрнектер алуға мүмкіндік береді.

Нүктенің жанама үдеуінің модулі доғалық координаттан уақыт бойынша екінші туынды алып есептеледі:

$$\varpi_{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} = h \frac{d^2\varphi}{dt^2} = h\varepsilon, \quad (8.14)$$

яғни

$$\varpi_{\tau} = h \cdot \varepsilon, \quad (8.15)$$

мұндағы ε – дененің бұрыштық үдеуінің модулі.

Нүктенің жанама үдеу векторы траекторияның M нүктесіндегі жанама бойымен бағытталады. Дененің айналмалы қозғалысы үдемелі болса, \bar{v} мен $\bar{\omega}_{\tau}$ векторлары бағыттас, ал ол кемімелі болған жағдайда бағыттары қарама-қарсы болады.

$$\bar{\omega}_{\tau} = \varpi_{\tau}\bar{\tau}, \quad (8.16)$$

нүктенің жанама үдеу векторы.

Нүктенің нормаль үдеуі де (7.30) формуланы қолданып есептеледі:

$$\varpi_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h, \quad (8.17)$$

сонымен,

$$\varpi_n = \omega^2 h. \quad (8.18)$$

Нормаль үдеу векторы $\overline{\omega}_n$ нүктенің траекториясы болатын, радиусы h шеңбер радиусының бойында жатып, шеңбердің центріне қарай бағытталады.

$$\overline{\omega}_n = \omega_n \overline{n}. \quad (8.19)$$

Нүктенің толық үдеуі $\overline{\omega}$ векторын құраушылары нормаль $\overline{\omega}_n$ және жанама $\overline{\omega}_\tau$ үдеулері арқылы анықталады:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_\tau + \overline{\omega}_n = h\varepsilon\overline{\tau} + h\omega^2\overline{n}. \quad (8.20)$$

M нүктесінің толық үдеуінің модулі келесі формуламен есептеледі:
 M

$$\omega = \sqrt{\omega_\tau^2 + \omega_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (8.21)$$

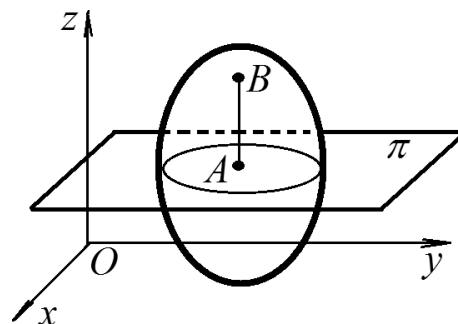
M нүктесінің толық векторының бағыты оның нормаль өстің ортымен жасайтын бұрышы δ арқылы анықталады (8.4, *b*-сурет)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{|\omega_\tau|}{\omega_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (8.22)$$

8.5. Қатты дененің жазық-параллель қозғалысы жөнінде ұғым

Қатты дененің жазық-параллель қозғалысы деп қатты дененің барлық нүктелерінің қандай да бір қозғалмайтын жазықтыққа параллель жазықтықтағы қозғалысын айтады.

Сызбада бейнеленген дене нүктелері қозғалмайтын координат жүйесінің Oxy жазықтығына параллель қозғалсын. Қатты дененің қасиеті мен жазық қозғалыстың анықтамасынан Oxy жазықтығына перпендикуляр дененің A, B нүктелерін қосатын AB кесіндісі, ілгерілемелі қозғалыста болатынын тұжырымдауға болады (8.5-сурет). Ілгерілемелі қозғалыс анықтамасына сүйеніп, кесіндінің барлық нүктелері бірдей жылдам-

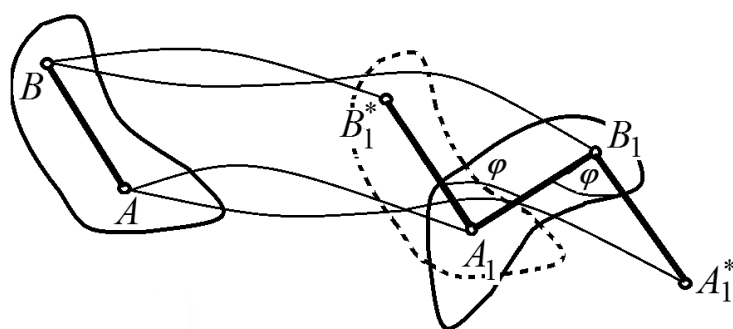


8.5-сурет

дықпен, бірдей үдеумен қозғалып, бірдей траекториялар сызатынын білеміз.

Сонымен, қозғалмайтын Oxy жазықтығына параллель, π жазықтығымен қиылған, дененің жазық қимасының барлық нүктелерінің қозғалысы, осы нүктелерде тұрғызылған перпендикулярларда жататын, дененің барлық нүктелерінің қозғалысын толығымен сипаттайды. Бұл тұжырым қатты дененің жазық-параллель қозғалысын зерттеуі, оның қозғалмайтын жазықтыққа параллель кез келген қимасының өз жазықтығындағы қозғалысын зерттеуге келтірілетінін аңғартады (8.6-сурет). Қатты дененің зерттенді қимасын Oxy жазықтығына орналастырайық. Қиманы жазық фигура деп қарастыруға болады. Жазық фигураның Oxy жазықтығындағы жағдайын оның кез келген екі нүктесін қосатын кесіндінің AB жағдайымен анықталатыны айқын.

AB кесіндісін өзіне-өзін параллель жылжытып, $A_1^*B_1$ орнына әкелуге болады (бұл жағдайда дене ілгерілемелі қозғалыс жасайды), ал сонан кейін B_1 нүктесіне қарағанда φ бұрышына бұрайық (бұл жағдайда фигура айналма қозғалыс жасап, A_1B_1 орнына ауысады). Бұл қозғалысты басқаша да жүзеге асыруға болады. Алдымен AB кесіндісін өзіне-өзін параллель жылжытып, $A_1B_1^*$ орнына жылжытып, артынан A_1 нүктесіне қарағанда φ бұрышына бұрып, A_1B_1 орнына әкелеміз.



8.6-сурет

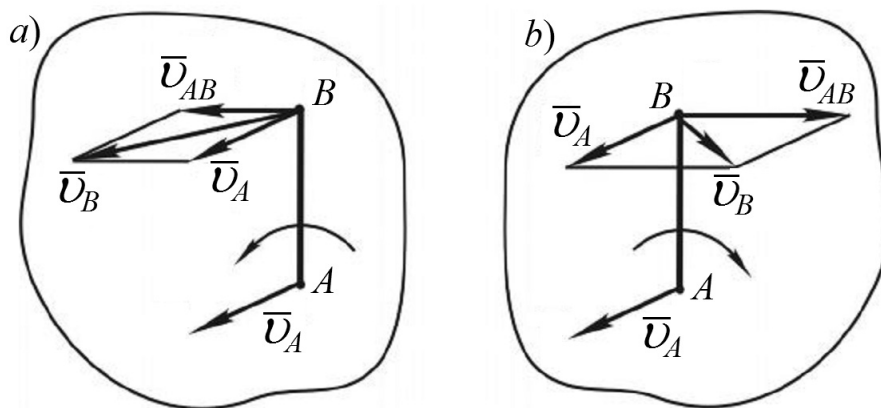
Фигураның бұрылу қозғалыс жасайтын нүктесін *полюс* деп атайды. Бірінші жағдайда B_1^* нүктесі полюс болса, екінгі жағдайда – A_1 . Полюс ретінде фигураның кез келген нүктесін алуға болатыны айқын.

Сонымен, қатты дененің жазық-параллель қозғалысы екі қозғалысқа: ілгерілемелі және лездік айналмалы қозғалыстарға жіктеледі. Жазық-параллель қозғалыстың ілгерілемелі қозғалысы *полюсті іріктеуге* байланысты. 8.6-суреті аңғартатындай, B_1 нүктесі полюс болғандағы AA_1 орнын ауыстыруы A_1 нүктесі полюс болғандағы BB_1 орнын ауыстыруы емес.

Жазық-параллель қозғалыстың айналмалы қозғалысын қарастырып, *бұрылу бұрышының полюске тәуелсіз* екенін көреміз.

Жазық-параллель қозғалысты екі қозғалысқа жіктеуді дене нүктелерінің жылдамдығын анықтауға қолдануға болады. Онда фигураның жазық-параллель қозғалысын ілгерілемелі және лездік айналмалы қозғалыстардың қосындысы деп қарастыруға болады (8.7-сурет). Демек, дененің кез келген нүктесінің жылдамдығын A полюсі қозғалысының \bar{v}_A жылдамдығы және A полюсіне қатысты айналмалы қозғалысы жылдамдығы \bar{v}_{BA} -ның геометриялық қосындысына тең

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$



8.7-сурет

Айналма қозғалыстың жылдамдығы былайша есептеледі:

$$v_{BA} = \omega \cdot AB,$$

мұндағы ω – айналу бұрыштық жылдамдығы; AB – B нүктесінің A полюсіне қатысты айналу радиусы.

Демек, жазық фигураның кез келген B нүктесінің толық жылдамдығы полюстің жылдамдығы мен жазық фигураның полюсті айнала қозғалғандағы B нүктесі жылдамдығының векторлық қосындысына тең (8.7-сурет).

\vec{v}_{BA} жылдамдық векторы \overline{AB} -ға перпендикуляр және дененің айналу бағытымен бағыттас болады, ал модулі $v_{BA} = \omega \cdot BA$ тең, яғни B нүктесінен A нүктесіне дейінгі арақашықтыққа пропорционал.

8.7-суретте дененің әртүрлі бағытта бұрылуына қатысты жылдамдық векторлары көрсетілген.

8.6. Есептерді шешудің әдістемесі

8.1-мысал. Радиусы R доңғалақ, өз жазықтығына перпендикуляр және өзінің центрінен өтетін қозғалмайтын өстің төңірегінде бірқалыпты кеми айналып, доңғалақ N айналым жасағаннан кейін тоқтаған. Бастапқы бұрыштық жылдамдығы $\omega_{z0} > 0$. Доңғалақтың бұрыштық үдеуін анықтаңыз.

Шешуі: Доңғалақтың $t=0$ уақыт мезетіндегі бұрылу бұрышы $\varphi_0 = 0$ деп есептейік. Доңғалақ тоқтаған мезеттегі уақытты $t=T$ деп белгілейік, доңғалақтың T уақыт арасындағы бұрылған бұрышы φ келесі формуламен есептеледі:

$$\varphi = 2\pi \cdot N, \quad \omega_z(T) = 0.$$

$$\omega_z = \omega_{z0} + \varepsilon_z t \quad \text{мен} \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_{z0}t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}$$

формулаларын қолданып,

$$0 = \omega_{z0} + \varepsilon_z \cdot T, \quad 2\pi N = \omega_{z0}T + \frac{\varepsilon_z T^2}{2}$$

теңдеулерін аламыз.

Бірінші теңдеуден доңғалақтың айналған уақытын анықтап,

$$T = -\frac{\omega_{z0}}{\varepsilon_z},$$

оны екінші теңдеуге қояйық, сонда:

$$2\pi N = -\frac{\omega_{z0}^2}{\varepsilon_z} + \frac{\varepsilon_z \cdot \omega_{z0}^2}{2\varepsilon_z^2}.$$

Бұдан доңғалақтың бұрыштық үдеуі анықталады:

$$\varepsilon_z = -\frac{\omega_{z0}^2}{2\pi N}.$$

8.2-мысал. Бу турбинасы дискісінің бұрыштық үдеуі іске қосылған сәттен бастап уақытқа пропорционал өседі де, $t = 6$ с кейін оның сан мәні 18π рад/с-қа жетеді. Дискінің жұмыс істеу аралығында қанша рет толық айналыс жасағанын анықтаңыз.

Шешуі: Есептің шартына сәйкес, белгісіз пропорциялық коэффициентті k деп белгілеп, бұрыштық үдеу үшін

$$\varepsilon = kt, \quad \frac{d\omega}{dt} = kt,$$

теңдіктерін жаза аламыз. Екінші теңдіктің екі жағында dt -ға көбейтіп, жазсақ:

$$d\omega = ktdt$$

шығады, бұл теңдіктен интеграл алған соң, дененің бұрыштық жылдамдығын анықтайтын теңдікті жаза аламыз:

$$\omega = \frac{1}{2}kt^2 + C.$$

Жазылған теңдіктегі тұрақты белгісіз $C = 0$ болады, өйткені дискінің бастапқы $t = 0$ уақытында бұрыштық жылдамдығының $\omega_0 = 0$. Олай болса,

$$\omega = \frac{1}{2}kt^2.$$

Енді дискінің жұмыс уақытында оның бұрыштық жылдамдығының шамасы $\omega_0 = 0$ өлшемінен, $\omega_1 = 18\pi$ рад/сек өлшеміне дейін өсетіндіктен,

$$\omega_1 = 18\pi = \frac{1}{2}kt^2 = \frac{1}{2}k \cdot 6^2$$

өрнегінен белгісіз коэффициент $k = \pi$ екенін анықтаймыз. Сонымен, айнымалы бұрыштық жылдамдықтың теңдеуі

$$\omega = \frac{1}{2} \pi t^2.$$

Дискінің бұрыштық жылдамдығы мен бұрылу бұрышы арасындағы тәуелділікті

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

қолданып, оны түрлендіріп интегралдаймыз:

$$\varphi = \int \omega \cdot dt = \int \frac{\pi}{2} t^2 dt = \frac{\pi}{6} t^3 + C_1.$$

Есептің шарты бойынша бастапқы уақытта $t = 0$ сәтінде ізделіп отырған дискінің бұрылу бұрышы $\varphi_0 = 0$ болғандықтан, $C_1 = 0$, олай болса, бұрылу бұрышының теңдеуін келесі түрде аламыз:

$$\varphi = \frac{\pi}{6} t^3.$$

Дискінің жұмыс істеу аралығындағы қанша рет толық айналыс жасағанын анықтау үшін, бұрылу бұрышын радиан бірлігіне түрлендірейік:

$$\varphi = 2\pi N \text{ мұнан } 2\pi N = \frac{\pi}{6} t^3.$$

Бұл өрнектен дискінің бір айналымдағы бұрылу бұрышы 2π -ге тең болатындығын пайдаланып, $t = 6$ с уақытта қанша толық айналым жасағанын анықтаймыз:

$$N = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{6^3}{2\pi} = 18 \text{ айн.}$$

8.3-мысал. Тыныштықта тұрған, радиусы $R = 2 \text{ м}$ сермер бірқалыпты үдемелі айнала бастайды да, 10 сек уақыттан кейін, оның жиегіндегі нүктесінің сызықтық жылдамдығы $v = 100 \text{ м/с}$ жетеді. Уақыттың 15 с кезіндегі сермердің жиегіндегі нүктенің сызықтық жылдамдығын, жанама және нормаль үдеулерін анықтаңыз.

Шешуі: Есептің шартына сәйкес, маховик тыныштық сәтінен $\omega = 0$, бірқалыпты үдемелі айналмалы қозғалыс жасай бастайтындықтан, оның бұрыштық жылдамдығы және оның жиегіндегі нүктенің сызықтық жылдамдығы келесі өрнектермен есептеледі:

$$\omega = \varepsilon \cdot t, v = \omega R = \varepsilon R t.$$

Есептің шарты бойынша, уақыттың $t = 10 \text{ с}$ сәтінде нүктенің сызықтық жылдамдығы $v = 100 \text{ м/с}$ болатындығын ескере отырып, соңғы теңдеуден сермердің бұрыштық үдеуін есептеп шығара аламыз:

$$\varepsilon = \frac{v}{Rt} = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5 \text{ рад/с}^2.$$

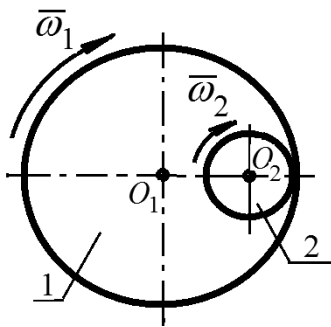
Енді, уақыттың $t_1 = 15 \text{ с}$ сәтіндегі, сермердің жиегіндегі нүктенің сызықтық жылдамдығын және оның жанама, нормаль үдеулерінің шамаларын анықтаймыз:

$$v_1 = \varepsilon R t_1 = 15 \cdot 2 \cdot 5 = 150 \text{ м/с},$$

$$\varpi_\tau = \varepsilon R = 5 \cdot 2 = 10 \text{ м/с}^2,$$

$$\varpi_n = \omega_1^2 R = \frac{v_1^2}{R} = \frac{150^2}{2} = 11250 \text{ м/с}^2.$$

8.4-мысал. Суретте көрсетілген I және II тісті доңғалақтар өзара ішкі берілісте орналасқан. Радиусы 100 мм ішкі II дөңгелек сурет жазықтығына перпендикуляр $O_2 z_2$ өсі төңірегінде (8.8-сурет) минутына 3000 айналым жасайды. Тұрақты $O_1 z_1$ өсі төңірегінде минутына 1000 айналым жасайтын сыртқы I доңғалақтың радиусы неге тең?



8.8-сурет

Шешуі: Екі доңғалақтың жанасу (8.8-сурет) нүктелерінің сызықтық жылдамдықтарының $v_1 = v_2$ өзара тең болатынын ескере отырып,

$$R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2 \quad \text{немесе} \quad R_1 \frac{\pi n_1}{30} = R_2 \frac{\pi n_2}{30}$$

теңдігінен бірінші доңғалақтың радиусын анықтаймыз:

$$R_1 = R_2 \frac{\pi n_2}{30} \cdot \frac{30}{\pi n_1} = 100 \cdot \frac{3000}{1000} = 300 \text{ мм}.$$

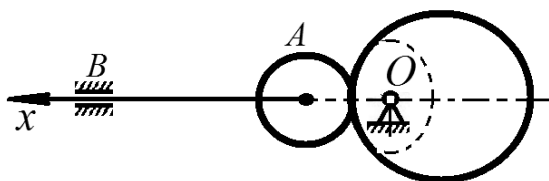
Демек, бірінші доңғалақтың радиусы $R_1 = 300 \text{ мм}$.

8.5-мысал. Тыныштықта тұрған жұдырықша қозғалысқа келтірілген сәттен бастап, сурет жазықтығына перпендикуляр (8.9-сурет) орналасқан өсті тұрақты $\varepsilon = 0,2 \text{ рад} / \text{с}^2$ бұрыштық үдеумен айналып қозғала бастайды. Егер осы жұдырықшалы механизмнің AB стержені, жұдырықша контурының теңдеуіне $x = \left(\frac{20}{\pi} + 40 \right)$ см сәйкес, қайтармалы-ілгерілемелі қозғалыс жасайтын болса, осы AB стерженінің іске қосылғаннан кейінгі уақыттың $t = 10 \text{ с}$ сәтіндегі жылдамдығы мен үдеуін анықтаңыз.

Шешуі: Алдымен қозғалысқа келтірілген жұдырықшаның айналу бұрышын анықтаймыз:

$$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = 0,1 \cdot t^2.$$

AB стержені түзу сызықты қозғалыс жасайтындықтан, оның \bar{v} жылдамдық векторының Ox өсіне проекциясы жұдырықшаның қозғалыс теңдеуінен уақытқа қатысты туындысына тең:



8.9-сурет

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

болатындықтан, жұдырықшаның қозғалыс теңдеуін

$$x = \left(\frac{20}{\pi} \cdot 0,1 \cdot \pi \cdot t^2 + 40 \right) = 2t^2 + 40$$

түрінде жазып, оның туындысын есептеп, стерженьнің қозғалу жылдамдығын анықтаймыз:

$$v_x = 4t \text{ см / с}$$

Al стерженінің үдеуі

Al

$$\varpi_x = \frac{dv_x}{dt} = 4 \text{ см / с}^2.$$

Стерженьнің қозғалысқа келтірілген сәттен бастап 10 секундтан кейінгі жылдамдығы мен үдеуі

$$v_x = 4 \cdot 10 = 40 \text{ см / с}, \quad \varpi_x = 4 \text{ см / с}^2.$$

Ізденді жылдамдық пен үдеудің шамалары: $v_x = 40 \text{ см / с}$,
 $\varpi_x = 4 \text{ см / с}^2$

Жаттығу есептері

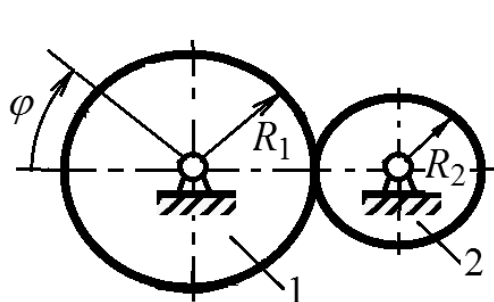
1-есеп. Дененің бұрыштық жылдамдығы $\omega = -8t$ заңдылығына сәйкес өзгереді. Егер $t_0 = 0$ болғанда бұрылу бұрышы $\varphi = 5 \text{ рад}$ болса, онда $t = 3 \text{ сек}$ болған сәтте дененің бұрылу бұрышы неге тең?

2-есеп. Электр қозғалтқыштың роторы бірқалыпты үдемелі айнала бастап, алғашқы 5 сек ішінде 100 айналыс жасады. Ротордың бұрыштық үдеуін анықтаңыз.

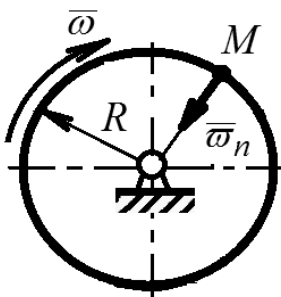
3-есеп. Дененің бұрыштық үдеуі $\varepsilon = 3t^2$ заңдылығына сәйкес өзгереді. Дененің бастапқы бұрыштық жылдамдығы $\omega_0 = 2 \text{ рад / с}$ деп алып, $t = 2 \text{ сек}$ болған сәттегі дененің бұрыштық жылдамдығын анықтаңыз.

4-есеп. Радиусы $R_1 = 0,8 \text{ м}$ 1-доңғалақ $\varphi = 20t$ заңдылығына сәйкес айналады (1-сурет). $t = 3,14 \text{ сек}$ ішінде онымен ілініскен

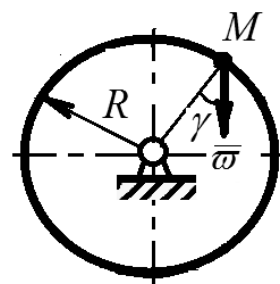
радиусы $R_2 = 0,5 м$ доңғалақ қанша айналыс жасайды және оның бұрыштық жылдамдығы неге тең?



1-сурет



2-сурет



3-сурет

5-есеп. Тетік өзінің қозғалмайтын өсі төңірегінде $\varphi = 2\pi \cos \pi t^2$ заңдылығымен айналады. $t = 2$ сек болған сәттегі тетіктің бұрылу бұрышын, бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуін анықтаңыз (2-сурет).

6-есеп. Қозғалмайтын өсті айналып тұрған радиусы $R = 0,4 м$ дискінің M нүктесінің үдеуі $\varpi_M = 8 м / сек^2$ -қа тең (3-сурет). Бұрыш $\gamma = 30^\circ$ деп алып, дискінің бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуін анықтаңыз.

Қайталау сұрақтары:

1. Абсолют қатты дене қозғалысының түрлерін атап, қозғалыс заңдылықтарын жазыңыз.
2. Қатты дененің қандай қозғалысы ілгерілемелі деп аталады? Ілгерілемелі қозғалыстың қасиеттерін атап, түсінік беріңіз.
3. Қатты дененің айнымалы қозғалысы деп қандай қозғалысты айтамыз?
4. Тұрақты өсті айналатын қатты дененің еркіндік дәрежесі неге тең? Оның айналма қозғалыс заңы деп нені айтамыз?
5. Абсолют қатты дененің тұрақты өстен айналуы кезіндегі бұрыштық жылдамдық және бұрыштық үдеу векторлары туралы түсінік беріңіз.
6. Тұрақты өстен айналып тұрған абсолют қатты дененің кез келген нүктесінің жылдамдығын және үдеуін анықтайтын өрнектерді жазып, түсінік беріңіз.

7. Эйлер формуласын қорытып шығарыңыз. Бұл формуланың маңызы қандай?
8. Айналмалы қозғалыстағы дене нүктелерінің үдеулерін анықтаудың геометриялық және аналитикалық әдістерін түсіндіріңіз.
9. Айналып тұрған абсолют қатты дененің қандай нүктелері үшін мынадай жағдайлар орын алады:
 - a) жылдамдықтары шама жағынан өзара тең;
 - b) жылдамдықтарының бағыттары бірдей;
 - c) жылдамдықтары шама жағынан тең, бағыттары бірдей.
10. Жазық параллель қозғалыстағы абсолют қатты дененің кез келген нүктесінің жылдамдығы өрнегінің екі түрін жазып, түсінік беріңіз.
11. Жазық-параллель қозғалыстағы қатты дененің еркіндік дәрежесі нешеге тең?
12. Лездік айналу центрі деп қандай нүктені айтамыз? Жылдамдықтардың лездік центрі деп қандай нүктені айтамыз? Бұл ұғымдардың бір-бірінен айырмашылығы бар ма?
13. Жазық фигура қозғалысының теңдеулерін жазып көрсетіңіз.
14. Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтары аналитикалық әдіспен қалай анықталады? Ол үшін нені алдын ала білу керек?
15. Жазық фигура нүктесінің үдеуін қандай формулалар арқылы анықтаймыз?
16. Үдеулердің лездік центрі берілген болса, жазық фигураның кез келген нүктесінің үдеуі қалай анықталады?
17. Эйлер-Даламбер теоремасы қалай айтылады?
18. Абсолют қатты дененің жазық параллель қозғалысын қарапайым қозғалыстар арқылы қалай сипаттайды?
19. Қандай жағдайда заттық нүктенің нормаль үдеуі нөлге тең?
20. Қандай жағдайда заттық нүктенің жанама үдеуі нөлге тең?
21. Қатты дене қозғалысын нүкте қозғалысы ретінде қарастыруға бола ма?

ҮШІНШІ БӨЛІМ. ДИНАМИКА

Динамика деп теориялық механиканың денеге түсірілген күштер мен олардың әсерінен болатын қозғалыс арасындағы тәуелділікті зерттейтін бөлімін айтады.

Осы бөлімдегі негізгі ұғымдардың бірі – дененің массасы. *Масса – дененің инерттілігін сипаттайтын шама.*

Динамиканың өзі екі бөлімге бөлінеді: *бірінші бөлімі материялық нүкте динамикасы болса, екіншісі материялық нүктелер жүйесінің динамикасы.*

Динамикада қозғалысы зерттелетін қарапайым нысан – *материялық нүкте. Материялық нүкте деп қозғалыстың берілген жағдайларында, өлшемдерін ескермеуге болатын белгілі массасы бар геометриялық нүкте деп қарастыруға болатын денені айтамыз.* Қозғалысы еш бағытта шектелмейтін материялық нүкте *еркін нүкте* деп аталады.

Әрбір денені материялық нүктелердің жиынтығы деп қарауға болады. Ендеше, динамиканы материялық нүкте динамикасынан бастаған жөн. Динамиканың бұл бөлімінде бір ғана материялық нүкте қозғалысының заңдылығы анықталады. Материялық нүкте қозғалысы үшін анықталған заңдылықтарды бірнеше материялық нүкте жағдайына жалпылай отырып, материялық нүктелер жүйесінің заңдылығын алуға болады. Осының нәтижесінде қатты дене қозғалысы толық сипаттайтын заңдылықтарды да табуға болады.

9-тарау. МАТЕРИАЛЫҚ НҮКТЕ ДИНАМИКАСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ

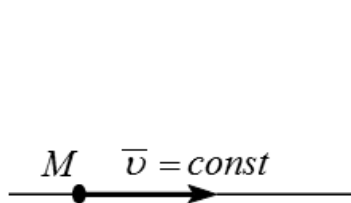
9.1. Динамиканың аксиомалары

Динамика негізіне аксиомалар ретінде қабылданатын бірнеше қағида жатады. Бұл қағидалар табиғаттағы құбылыстарға жасалған көптеген жылғы бақылаулар мен тәжірибелерді және қоғамдық практика нәтижелерін жалпылап қорытындылаудан алынған. Механика аксиомаларын ең толық және ақырғы түрінде тұжырымдаған – И.Ньютон. Сондықтан да оларды **Ньютон заңдары** деп атайды.

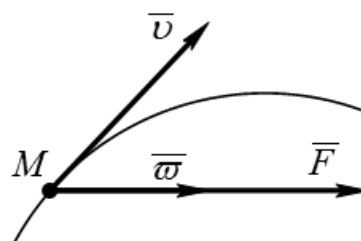
1-аксиома. *Егер еркін материалдық нүктеге ешқандай күш әсер етпесе, онда ол өзінің тыныштық күйін немесе түзу сызықты бірқалыпты қозғалысын сақтайды (9.1-сурет). Бұл аксиома екпін заңы* деп те аталады.

2-аксиома. *Егер еркін материалдық нүктеге бір күш әсер етсе, онда ол осы күшке пропорционал үдеумен қозғалады.*

Бұл аксиома былай да оқылады: *материалдық нүктеге әсер етуші күш осы нүкте үдеуімен бағыттас және шамасы үдеуге пропорционал болады (9.2-сурет). Осы аксиоманы динамиканың негізгі заңы* деп те атайды.



9.1-сурет



9.2-сурет

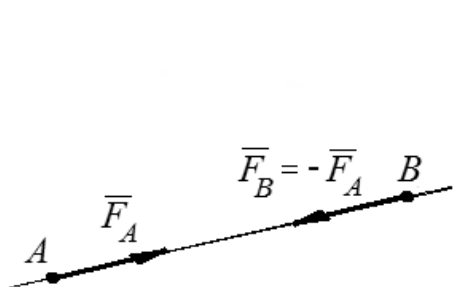
Әдетте, осы заң былай жазылады:

$$m \bar{w} = \bar{F}, \quad (9.1)$$

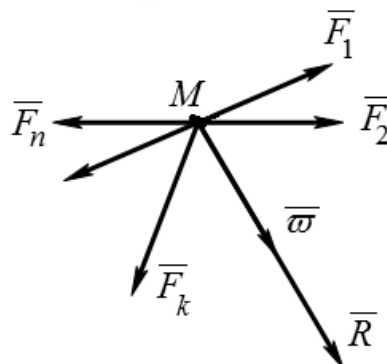
мұндағы: m – материалдық нүктенің массасы, өлшем бірлігі – килограмм; \bar{w} – оның үдеуі; \bar{F} – нүктеге әсер етуші күш.

3-аксиома. Екі материялық нүкте бір-біріне модульдері тең, бір түзудің бойында жататын бағыттары қарама-қарсы күштермен әсер етеді (9.3-сурет).

Осы үш аксиома – мектептегі физикадан белгілі Ньютонның заңдары.



9.3-сурет



9.4-сурет

4-аксиома. Еркін материялық нүктеге бір мезетте бірнеше күш әсер етсе, онда нүкте күштердің әрқайсысы нүктеге беретін үдеулерінің векторлық қосындысына тең үдеумен қозғалады (9.4-сурет).

$$\bar{w} = \sum_{v=1}^n \bar{w}_v = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^n \bar{F}_v = \frac{\bar{R}}{m}. \quad (9.2)$$

Бұл аксиома нүктеге әсер ететін бірнеше күші тең әсерлі күшпен алмастыруға болатындығын көрсетеді.

Осы аксиома *күш әсерінің тәуелсіздігі туралы заң* деп те аталады.

1, 2, 4-аксиомалардағы орындалатын координат жүйелерін *екпіндік жүйе* деп атайды. Техника есептерін шешкенде, екпіндік жүйе ретінде жермен немесе жұлдыздармен байланысқан координат жүйесі алынады.

5-аксиома. Материялық нүктенің қандай да бір бағыттағы орын ауыстыруын шектейтін шарттарды *байланыстар* деп, ал орын ауыстыруы шектелген нүктені *еркін емес нүкте* деп атайды. Еркін емес нүктедегі байланыс әсерлерін байланыс реакцияларымен алмастырып, нүктені еркін нүкте ретінде қарастыруға болады.

Бұл аксиома 1, 2, 4-аксиомаларды еркін емес нүктеге қолдануға мүмкіндік береді, ол үшін алдын ала нүктені байланыстардан

босатып, нүктені берілген күштер мен байланыс реакцияларының әсеріндегі еркін нүкте деп қарастырамыз, ал динамиканың негізгі заңына мынадай түр беруге болады:

$$m \bar{\omega} = \bar{F}^{(a)} + \bar{N}, \quad (9.3)$$

мұндағы: $\bar{F}^{(a)}$ – нүктеге әсер ететін берілген күштердің тең әсерлі күші, (бұл күштерді актив күштер деп атайды); \bar{N} – байланыс реакцияларының тең әсерлі күші.

9.2. Материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық тендеулері

Динамиканың негізгі заңынан материялық нүкте қозғалысының кез келген санақ жүйесіне қатысты дифференциалдық тендеулерін қорытып шығаруға болады. Массасы m материялық нүкте $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ күш әсерлерінен қозғалыста болсын делік. Динамиканың 2, 4-аксиомаларына сүйене отырып, келесі тендеуді жазамыз,

$$m \bar{\omega} = \bar{F}. \quad (9.4)$$

Қозғалыстағы нүкте үдеуі $\bar{\omega}$ радиус – вектор \bar{r} арқылы былайша өрнектелетініні кинематикадан белгілі:

$$\bar{\omega} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}.$$

Осы себептен материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық тендеуінің векторлық түрі мынадай болады:

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}. \quad (9.5)$$

Егерде (9.4) немесе (9.5) векторлық тендеулерін екпіндік координаттар жүйесінің декарттық өстеріне проекциялайық:

$$m \omega_x = F_x, \quad m \omega_y = F_y, \quad m \omega_z = F_z,$$

мұндағы $\varpi_x = \ddot{x}$, $\varpi_y = \ddot{y}$, $\varpi_z = \ddot{z}$ екенін ескеріп, келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (9.6)$$

Осы теңдеулер жүйесі *еркін материялық нүкте қозғалысының декарттық координаттар өстеріне қатысты алынған дифференциалдық теңдеулері* деп аталады.

Егерде материялық нүкте бір жазықтықта қозғалса, координат жүйесін Oxy деп алсақ, (9.6) теңдеулері ықшамдалып былайша жазылады:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad (9.7)$$

себебі $z = 0$, сондықтан $F_z = 0$. Алынған теңдеулерді *материялық нүктенің жазықтықтағы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері* деп атайды.

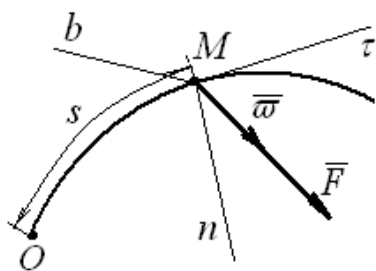
Материялық нүкте түзу сызық бойымен қозғалатын болса, ол түзуді Ox деп алсақ, *материялық нүктенің түзу сызықты қозғалысының дифференциалдық теңдеуін* аламыз:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad (9.8)$$

өйткені нүкте қозғалғанда $y = z = 0$, сондықтан $F_y = F_z = 0$.

Егерде (9.4) теңдеуді табиғи координаттар жүйесіне проекцияласақ (9.5-сурет), онда:

$$m \varpi_\tau = F_\tau, \quad m \varpi_n = F_n, \quad m \varpi_b = F_b.$$



9.5-сурет

мұндағы ϖ_τ , ϖ_n , ϖ_b және F_τ , F_n , F_b – үдеумен тең әсер етуші күштің қозғалыстағы нүкте проекциясының жанама, нормаль және бинормаль бағыттағы проекциялары. Кинематикадан білетініміздей,

$$\varpi_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad \varpi_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \varpi_b = 0,$$

мұндағы ρ – нүкте траекториясының қисықтық радиусы. Осы себептерден *материялық нүктенің табиғи координат өстеріндегі дифференциалдық теңдеулері* былайша жазылады:

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b. \quad (9.9)$$

(9.9) формуладағы екінші теңдеуді былайша түрлендіруге болады:

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}, \quad \frac{v^2}{\rho} = v \cdot \frac{v}{\rho} = v \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{d\varphi}} = v \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

мұндағы $\frac{d\varphi}{dt}$ – траекторияға жүргізілген жанаманың айналуынан пайда болған бұрыштық жылдамдық, себебі $d\varphi$ – траектория бойында шексіз жақын қатар тұрған екі нүкте арқылы өтетін жанамалар арасындағы бұрыш. Сонымен, дифференциалдық (9.9) теңдеулер мынадай түрге келеді:

$$m \frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m v \frac{d\varphi}{dt} = F_n, \quad 0 = F_b \quad (9.10)$$

Материялық нүкте қозғалысының басқа координаттық жүйедегі дифференциалдық теңдеулерін тұрғызу үшін, берілген координат өстеріндегі нүкте үдеулері мен нүктеге әсер ететін күштердің проекциялары анықталса болғаны.

(9.4) теңдеулерінің оң жағындағы күштердің нүкте координаттарына, жылдамдығына, уақытқа тәуелді болуы мүмкін екендігін ескерсек, материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулері былайша жазылады:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Нүкте динамикасында негізгі екі есеп бар. Оның біріншісінде материялық нүкте қозғалысының заңы және оның массасы m беріледі. Осы заңдылықта болатын қозғалысты тудыратын күшті табу керек болады. Екінші мәселеде берілген күш бойынша массасы m -ге тең нүкте қозғалысының заңын анықтау керек.

(9.11) теңдеулер жүйесін қолданып, динамиканың негізгі екі есебін шешуге болады.

9.3. Динамиканың бірінші және екінші есептері

Динамиканың бірінші есебі. Массасы m материялық нүкте қозғалысының заңдылығы берілген:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (9.12)$$

Нүктені осы қозғалысқа келтіретін F_x , F_y , F_z күштерін анықтау керек.

Нүкте динамикасының бірінші есебін шешу үшін, берілген (9.12) нүкте қозғалысының кинематикалық теңдеулерінен уақыт бойынша екінші ретті туынды алып, (9.4) немесе (9.12) теңдеулер жүйесін тұрғызып, оны шеше отырып, ізденді күштің өстерге проекцияларын табамыз:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}.$$

Осы күш проекциялары арқылы күштің модулі мен бағыты анықталады.

Динамиканың екінші есебі. Алғашқы шарттар бойынша, берілген күштер әсер ететін массасы m материялық нүктенің қозғалыс заңдылығын анықтау керек, яғни $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Бастапқы шарттар деп уақыттың бастапқы мезетіндегі нүктенің орны мен оның жылдамдығы аталады.

Бұл есеп, математикалық тұрғыдан қарағанда, Коши есебі деп аталады. Нүкте динамикасының екінші есебін шешу үшін, (9.6) немесе (9.11) дифференциалдық теңдеулер жүйесін құрып, жүйенің әрбір теңдеуін екі рет интегралдау керек.

Интегралдағанда алты интегралдау тұрақтылары C_1, C_2, \dots, C_6 пайда болып, толық шешімі мынадай түрде жазылады:

$$\begin{cases} x = f_1(t; C_1, C_2, \dots, C_6); \\ y = f_2(t; C_1, C_2, \dots, C_6); \\ z = f_3(t; C_1, C_2, \dots, C_6). \end{cases} \quad (9.13)$$

Осы алынған шешімдерден уақыт бойынша туынды алсақ, нүкте жылдамдығының проекцияларын анықтаймыз:

$$\begin{cases} v_x = f_1'(t; C_1, C_2, \dots, C_6); \\ v_y = f_2'(t; C_1, C_2, \dots, C_6); \\ v_z = f_3'(t; C_1, C_2, \dots, C_6). \end{cases} \quad (9.14)$$

Әсер етуші күштер бірдей болғанмен, (9.13) формуладан шығатын жалпы шешімі интегралдық тұрақтыларға байланысты әртүрлі дербес шешім болатыны көрініп тұр. Интегралдаудың белгісіз тұрақты шамалары бастапқы шарттардан, яғни уақыт t_0 болған сәттегі нүктенің орны x_0, y_0, z_0 мен жылдамдығының проекцияларының v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} шамалары бойынша анықталады. Көбінесе $t_0 = 0$ деп алынады.

Бастапқы шарттарды (9.13) және (9.14) теңдеулеріне қойып, интегралдық тұрақтыларды анықтап, берілген шарт үшін нүктенің қозғалыс заңдылығы анықталады:

$$\begin{cases} x = f_1(t; x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}); \\ y = f_2(t; x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}); \\ z = f_3(t; x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}). \end{cases} \quad (9.15)$$

Сонымен, *материялық нүктенің дифференциалдық теңдеулерінің бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімдері нүктенің нақты қозғалысын анықтайды.*

Динамиканың негізгі есебін шешкенде, көбіне мынадай ретті ұстанған ыңғайлы:

1. Координаттар жүйесін қабылдағанда, координаттың бас нүктесін қозғалыстағы нүктенің бастапқы орнымен беттестіріп, өстердің бағыттарын күштерді, жылдамдықтармен үдеулерді проекциялауға ыңғайлап салу керек.

2. Қабылданған координаттар жүйесіне қарағанда, қозғалыстағы нүктенің бастапқы шарттарын жазу керек.

3. Қозғалыстағы нүктенің кез келген уақыт аралығындағы қозғалысының орнын (көбінесе координаты және жылдамдығы оң болатындай) салу керек.

4. Нүктеге әсер етуші активтік күштер мен реакцияларды салу керек.

5. Материялық нүкте қозғалысын анықтайтын дифференциалдық теңдеулерді құру қажет.

6. Теңдеуге кіретін айнымалы күштердің қандай шамаларға тәуелді екенін көрсету керек.

7. Дифференциалдық теңдеулерді интегралдап, шыққан интегралдау тұрақтыларын бастапқы шарттардан анықтау қажет.

8. Есептің шешулерін пайдаланып, іздеп отырған қажетті шамаларды тауып, зерттеу керек.

9. Егерде нүкте қозғалысы бірнеше аралықтан тұратын болса, онда әрбір аралық үшін айтылған операцияларды бөлек-бөлек істеу керек. Әрбір аралықтың теңдеулерін шешкенде, бастапқы шарт ретінде алдыңғы аралықтың соңғы нүктесінің кинематикалық шамалары алынып отырады.

Динамиканың негізгі есебін шығарудың іс жүзінде маңызының зор екенін ескере отырып, нүкте траекториясы түзу және қисық сызық болғандағы жағдайларды жеке-жеке алып қарастыралық.

9.4. Есептерді шешудің әдістемесі

9.1-мысал. Жер бетіне h биіктіктен материялық нүкте бастапқы жылдамдықсыз құлаған (9.6-сурет). Нүктеге жердің тарту күші мен ауаның жылдамдыққа пропорционал кедергі күші $\bar{R} = -km\bar{v}$ әсер етеді, мұндағы k —ауаның қысымы мен температурасына байланысты тұрақты коэффициент, \bar{v} — нүктенің жылдамдығы. Нүкте қозғалысының заңдылығын анықтап, нүктенің ең үлкен жылдамдығының мәнін есептеңіз.

Шешуі: Нүктенің қозғалысын зерттеу үшін, 9.6-суретте көрсетілгендей, координат жүйесін таңдап аламыз. Координат жүйесінің басын нүктенің алғашқы орнын M_0 сәйкестендіріп алып, x өсінің оң бағытын нүкте қозғалысы бағытымен бағыттайық.

Нүкте қозғалысының бастапқы шарты $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$.

Нүктеге әсер ететін күштерді ескере отырып, нүктенің x өсінің бойымен қозғалысының дифференциалдық теңдеуін тұрғызайық:

$$m\ddot{x} = mg - k\dot{x};$$

$$\ddot{x} = g - k\dot{x};$$

$$\ddot{x} + k\dot{x} = g.$$

Бұл теңдеу – сызықты, тұрақты коэффициенті бар екінші ретті біртектісіз дифференциалдық теңдеу. Бұл теңдеудің шешімі осы теңдеудің дербес шешімімен осы теңдеуге сәйкес келетін біртекті теңдеудің жалпы шешімдерінің қосындысына тең.

Біртекті емес теңдеудің дербес шешімі келесі түрде жазылады:

$$x_1 = \frac{g}{k}t.$$

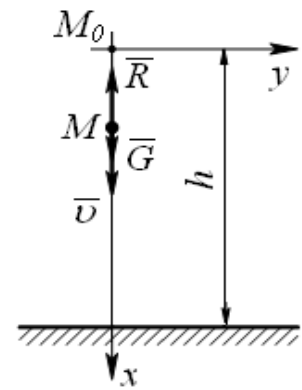
Біртекті теңдеуге сәйкес келетін сипаттауыш теңдеуді тұрғызайық:

$$\lambda^2 + k \cdot \lambda = 0.$$

Оның түбірлері $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -k$ – нақты сандар, сондықтан біртекті теңдеудің жалпы шешімі келесі түрде жазылады:

$$x_2 = c_1 + c_2 e^{-kt}.$$

Сонымен, нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі былай жазылады:



9.6-сурет

$$x = C_1 + C_2 e^{-kt} + \frac{g}{k} t.$$

Бастапқы шарттарды қолданып, тұрақты C_1, C_2 белгісіздерді анықтаймыз:

$$C_1 = -C_2, C_2 = \frac{g}{k^2}.$$

Анықталған тұрақты шамалардың мәндерін осының алдында алынған теңдеуге қойсақ, нүкте қозғалысының ақырғы теңдеуін аламыз:

$$x = \frac{g}{k} \left[\frac{1}{k} (e^{-kt} - 1) + t \right].$$

Осы теңдеуден уақыт бойынша туынды алып, нүктенің жылдамдығын есептейміз:

$$v_x = \dot{x} = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}).$$

Уақыт $t \rightarrow \infty$ ұмтылғанда, нүкте жылдамдығы өзінің ең үлкен шамасына ұмтылады:

$$v_x^{max} = \frac{g}{k}.$$

9.2-мысал. Массасы 5 кг материялық M нүктесі O ху жазықтығы бойында $x = 4 \cos \pi t$; $y = 2 \sin \pi t$ теңдеумен қозғалады, бұндағы t – уақыт.

Қандай күш әсерінен материялық нүкте осылайша қозғалыста болғанын анықтаңыз (9.7-сурет).

Шешуі: Берілген теңдеулердегі уақытты айырып, материялық нүкте траекториясының теңдеуін анықтаймыз. Ол үшін алдымен тригонометриялық функцияларды өрнектейік:

$$\cos \pi t = \frac{x}{4}, \quad \sin \pi t = \frac{y}{2}.$$

Бұл теңдеулердің екі жағын да квадраттап қосайық:

$$\cos^2 \pi t = \frac{x^2}{4^2}, \quad \sin^2 \pi t = \frac{y^2}{2^2},$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = \sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t.$$

Соңғы өрнектің сол жағы, тригонометриялық функцияның қасиеті бойынша $\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t = 1$, олай болса, нүктенің траекториясы:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

жартылай өстері $a = 4\text{ м}$, $b = 2\text{ м}$ болатын эллипс теңдеуімен өрнектелетінін табамыз.

Нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулері негізінде әсер етуші күш проекцияларын анықтаймыз:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y.$$

Материялық нүктенің теңдеулерінен:

$$\frac{dx}{dt} = -4\pi \sin \pi t; \quad \frac{dy}{dt} = 2\pi \cos \pi t;$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -4\pi^2 \cos \pi t; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -2\pi^2 \sin \pi t.$$

Мұнан нүктеге әсер етуші күш проекцияларын

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -5\pi^2 4 \cos \pi t; \quad F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = -5\pi^2 2 \sin \pi t,$$

немесе нүкте координаты арқылы өрнектесек:

$$F_x = -5\pi^2 x; \quad F_y = -5\pi^2 y.$$

Күштің модулі

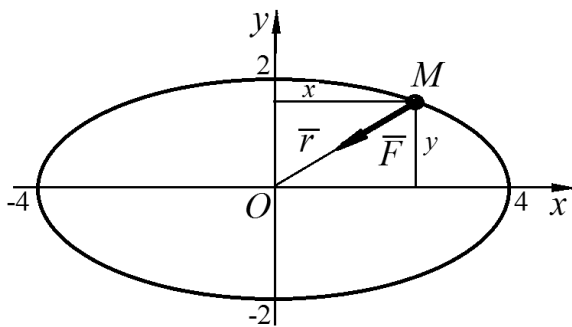
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 5\pi^2 \sqrt{x^2 + y^2} = 5\pi^2 r,$$

бұндағы \vec{r} – қозғалыстағы нүктенің радиус-векторы. Күштің координат өстерімен жасайтын бұрыштарының косинустары:

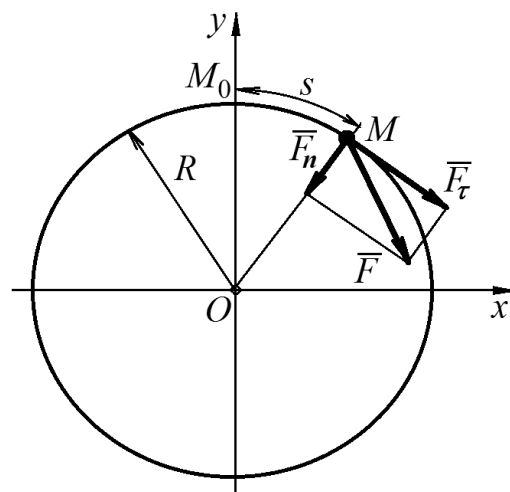
$$\cos\left(F_x^\vee, x\right) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}; \cos\left(F_y^\vee, y\right) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Осыдан \vec{F} күші \vec{r} радиус-векторына қарсы бағытталғаны көрініп тұр (9.7-сурет).

9.3-мысал. Массасы 10 кг материялық нүкте радиусы $R = 100$ м шеңбер бойымен (9.8-сурет) доғалық координаты $s = 0,1t^3$ м горизонталь жазықтықта қозғалады. Нүкте жылдамдығы $v = 30$ м/с болған сәттегі нүктеге әсер етуші күштің шамасы қандай болады?



9.7-сурет



9.8-сурет

Шешуі: Материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулерінің табиғи өстерге қатысты формулаларын пайдаланамыз:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b.$$

Бұл теңдеулердегі

$$v = \frac{ds}{dt} = 0,3t^2, \omega_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = 0,6t.$$

$$\omega_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(0,3t^2)^2}{100} = 0,0009t^4, \omega_b = 0.$$

Есептің шартынан нүкте жылдамдығы қанша уақытта $v = 30 \text{ м/с}$ болатынын анықтаймыз:

$$0,3t^2 = 30.$$

Бұл теңдеуден уақыт $t = 10 \text{ с}$ шығады.

Жанама және нормальдық үдеулердің $t = 10 \text{ с}$ болған сәттегі шамалары

$$\omega_\tau = 6 \text{ м/с}^2; \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{30^2}{100} = 9 \text{ м/с}^2.$$

Нүктеге әсер етуші күштің проекциялары:

$$F_\tau = m \omega_\tau = 60 \text{ Н}; \quad F_n = m \omega_n = 90 \text{ Н}.$$

Осыдан күштің шамасын анықтаймыз:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = \sqrt{60^2 + 90^2} \approx 108 \text{ Н}.$$

9.4-мысал. Массасы 2 кг материялық нүктенің қозғалысы $x = 3 \cos 2\pi t$, $y = 4 \sin \pi t$ теңдеулермен берілген.

Нүктеге әсер етуші күш проекцияларының нүкте координаттарына тәуелділігін көрсетіңіз.

Шешуі: Алдымен нүкте үдеуінің проекцияларын табамыз. Ол үшін есептің шартында берілген қозғалыс теңдеулерінен уақыт бойынша екі рет туынды аламыз:

$$\ddot{x} = -12\pi^2 \cos 2\pi t, \quad \ddot{y} = -4\pi^2 \sin \pi t.$$

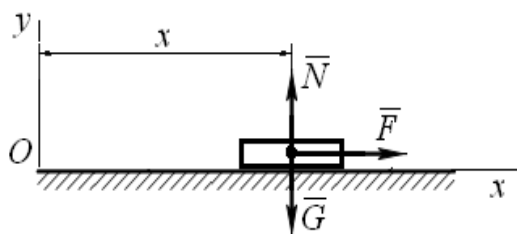
Нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін пайдалану арқылы күштің координаттар өстеріндегі проекцияларын табамыз:

$$F_x = m\ddot{x} = -12\pi^2 m \cdot \cos 2\pi, \quad F_y = m\ddot{y} = -4\pi^2 m \cdot \sin \pi.$$

Сан мәндерін орындарына қойып, нүктеге әсер етуші күш проекцияларының нүкте координаттарына тәуелділігін анықтаймыз:

$$F_x = -0,0789x \text{ Н}, \quad F_y = -0,0197y \text{ Н}.$$

9.5-мысал. Массасы $m = 1 \text{ кг}$ дене тыныштық күйінен тегіс горизонталь жазықтық бойымен $F = 6 + 8 \cos 2t \text{ Н}$ күші әсерінен қозғалады (9.9-сурет). Жүктің қозғалыс заңдылығын анықтаңыз.



9.9-сурет

Шешуі: Санақ жүйесінің Обас нүктесін жүктің бастапқы орнына сәйкестендіріп, Ox өсін қозғалыс бағытымен бағыттаймыз (9.9-сурет). Қабылданған санақ жүйесіне қарағанда, нүктенің бастапқы шарттары мынадай болады: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$. Денені кез келген қозғалып

бара жатқан жерінде тұрғызып, әсер етуші активті күшті \bar{F} , ауырлық күшін \bar{G} ($G = mg$) және жазықтықтың реакциясын \bar{N} түсірейік.

Дененің Ox өсі бойымен қозғалысының дифференциалдық теңдеуін құрамыз:

$$m\ddot{x} = F_x + G_x + N_x.$$

Қарастырып отырған жағдайда:

$$F_x = F = 6 + 8 \cos 2t, \quad G_x = 0, \quad N_x = 0$$

болғандықтан, теңдеу мына түрге келеді:

$$m\ddot{x} = 6 + 8 \cos 2t$$

Бұл теңдеуді интегралдасак,

$$m\dot{x} = 6t + 4 \sin 2t + C_1.$$

Бастапқы шарт бойынша $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, сондықтан $C_1 = 0$. Шыққан теңдеуді тағы да интегралдасак, мынадай өрнек шығады:

$$mx = 3t^2 - 2 \cos 2t + C_2.$$

Бастапқы шарт бойынша $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ болғандықтан, $C_2 = 2$.

Соңғы өрнектен, C_2 мәнін ескере отырып, дененің қозғалыс заңын табамыз:

$$x = 3t^2 - 2 \cos 2t + 2 \text{ м.}$$

Жаттығу есептері

1-есеп. Массасы m материялық нүктенің Ox өсіндегі қозғалыс теңдеуі $x = a \cdot \ln\left(1 + \frac{v_0}{a}t\right)$, мұндағы a және v_0 – тұрақты шамалар. Нүктеге әсер ететін \bar{F} күшін уақыттың және жылдамдықтың функциясы болатындай мәнін анықтаңыз.

2-есеп. Массасы $m = 2,04 \text{ кг}$ материялық нүктенің қозғалысы $x = 3 \cos 2\pi t$, $y = 4 \sin \pi t$ теңдеулерімен берілген. Күштің координат өстеріндегі проекциясын, координаттарға тәуелділігін анықтаңыз.

3-есеп. Горизонталь бағытпен бастапқы жылдамдығы v_0 , массасы m еркін ұшатын планерге $R = kv$ (k – кедергі коэффициенті, v – планер жылдамдығы) кедергі күші әсер етеді. Планер t уақыт аралығында қанша жол ұшатынын анықтаңыз.

4-есеп. Массасы m автомобиль түзу горизонталь жолмен қозғалады. Бастапқы жылдамдығы v_0 автомобиль моторының тарту күші тұрақты ($Q = \text{const}$) шама. Қозғалысқа әсер ететін кедергі күші $R = kv^2$ (k – кедергі коэффициенті) болған кездегі автомобиль жылдамдығы мен жүрген жолының арасындағы байланысты анықтаңыз.

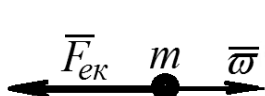
Қайталау сұрақтары:

1. Динамика нені зерттейді?
2. Динамиканың аксиомаларын айтып беріңіз.
3. Материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуі қалай жазылады?
4. Динамиканың екі есебі қалай тұжырымдалады?
5. Материалық нүкте жиынының Ньютон теңдеулері қалай жазылады?

10-тарау. КИНЕТОСТАТИКАНЫҢ НЕГІЗДЕРІ. ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПІ

10.1. Екпін күштері

Массасы m еркін материялық нүкте қандай да бір \vec{F} күшінің әсерінен \vec{w} үдеуімен қозғалсын делік (10.1-сурет). Динамиканың екінші аксиомасы бойынша



10.1-сурет

$$m \vec{w} = \vec{F}.$$

Егер осы теңдеудің барлық мүшелерін оның бір жағына көшірсек, онда мынадай теңдік аламыз:

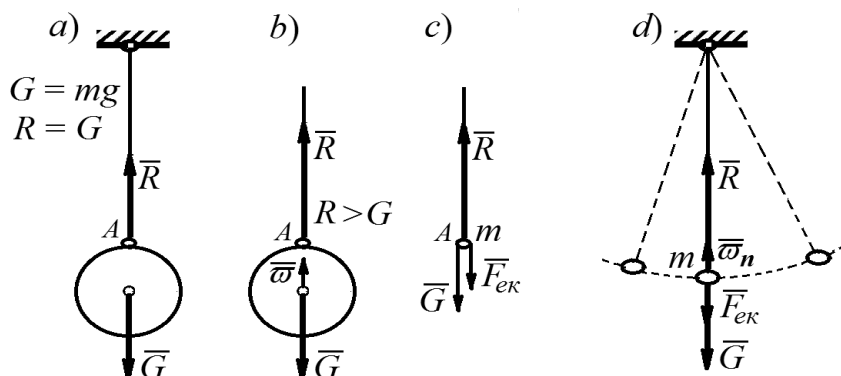
$$\vec{F} - m \vec{w} = 0.$$

Мұндағы $\vec{F}_{ek} = -m \vec{w}$ деп белгілейік. \vec{F}_{ek} векторы **нүктенің екпін күші** деп аталады. Демек, *материалық нүктенің массасы мен оның үдеуінің көбейтінділеріне тең және бағыты үдеудің бағытына қарама-қарсы күшті нүктенің екпін күші деп атаймыз.*

Шын мәнінде екпін күші үдемелі қозғалатын нүктеге емес, осы нүктеге үдеу беретін денеге түсіріледі.

Бұл тұжырымды келесі мысалдармен түсіндірейік.

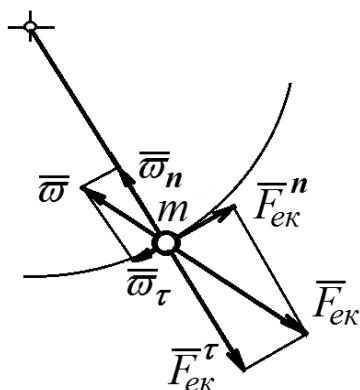
Осал арқанға ілінген массасы m жүк тепе-теңдікте тұрсын делік, яғни арқанның керілу күші $R = G$ болады (10.2, a-сурет).



10.2-сурет

Егер кенеттен арқан жоғары жүлқылай тартылған болса, онда арқан үзіліп кетуі мүмкін (10.2, *b*-сурет).

Осы жайтта сан мәні R -ге тең арқанның керілу күші өсе бастайды, өйткені арқанға жүктің ауырлық күшінен $G = mg$ басқа жүкті тыныштық күйде сақтап қалуға ұмтылатын шамас $m\omega$ екпін күші де $\bar{F}_{ек}$ әсер ете бастайды (10.2, *c*-сурет). Арқан, егер жүкті горизонталь бағытта итеріп жіберіп, оны арқанмен шайқалуына әкелетін болсақ та үзілуі мүмкін (10.2, *d*-сурет).



10.3-сурет

Қисық сызықты қозғалыстағы материялық нүкте үдеуі $\bar{\omega}$ болсын (10.3-сурет), әдетте, оны құраушы үдеулерге жіктейді: $\bar{\omega}_n$ (нормаль үдеу) және $\bar{\omega}_\tau$ (жанама үдеу). Сондықтан материялық нүктенің қисық сызықты қозғалысында екпін күшінің $\bar{F}_{ек}$ екі жіктеуші күштері туындайды: нормаль (басқаша айтқанда, центрден тепкіш) күш

$$\bar{F}_{ек}^n = -m\bar{\omega}_n \quad (10.1)$$

және жанама (басқаша айтқанда, тангенсаль) күш

$$\bar{F}_{ек}^\tau = -m\bar{\omega}_\tau. \quad (10.2)$$

Нормаль үдеудің мәні (7.29) немесе (8.18) формулаларымен анықталатын болғандықтан, нормаль күштің мәні келесі формулалармен анықталады:

$$F_{ек}^n = \frac{mv^2}{\rho}, \quad (10.3)$$

немесе

$$F_{ек}^n = m\omega^2 h. \quad (10.4)$$

10.2. Даламбер принципі

Массасы m еркін материялық нүкте $\bar{F}^{(a)}$ актив күштің әсерінен қисық сызық бойымен $\bar{\omega}$ үдеуімен қозғалсын делік. Нүктені

байланыстардан босатып, берілген күштер мен байланыс реакцияларының әсеріндегі еркін нүкте деп қарастырсақ, динамиканың екінші аксиомасы бойынша

$$m \bar{\omega} = \bar{F}^{(a)} + \bar{N}, \quad (10.5)$$

мұндағы: $\bar{F}^{(a)}$ – нүктеге әсер ететін берілген күштердің тең әсерлі күші, (бұл күштерді актив күштер деп атайды); \bar{N} – байланыс реакцияларының тең әсерлі күші.

Егер осы теңдеудің барлық мүшелерін оның бір жағына көшірсек, онда мынадай теңдік аламыз

$$\bar{F}^{(a)} + \bar{N} + (m \bar{\omega}) = 0. \quad (10.6)$$

Мұндағы $-m \bar{\omega} = \bar{F}_{ек}$ векторы нүктенің екпін күші. Онда нүкте динамикасының негізгі теңдеуі

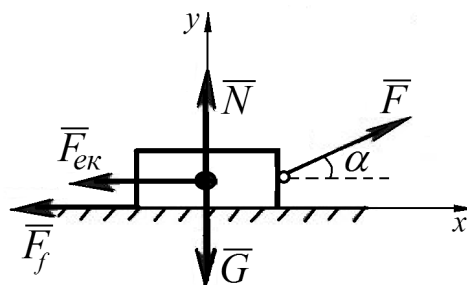
$$\bar{F}^{(a)} + \bar{N} - \bar{F}_{ек} = 0. \quad (10.7)$$

Осы (10.7) теңдеуі еркін материялық нүктенің *Даламбер принципі*н өрнектейді. Ол былайша тұжырымдалады: *қозғалыстағы материялық нүктеге әсер ететін актив күштер байланыс реакциялары және екпін күші теңгерілген күштер жүйесін құрайды.*

10.3. Есептерді шешудің әдістемесі

1-мысал. Горизонтпен $\alpha = 30^\circ$ бұрыш жасай әсер ететін \bar{F} күшінің әсерінен салмағы G дене горизонталь жазықтық бойымен $\bar{\omega}$ үдемелі қозғалады. Егер қозғалатын дене мен жазықтық арасындағы үйкеліс коэффициенті f болса, әсер етуші күштің модулі неге тең?

Шешуі: 10.4-суретте денеге әсер ететін күштер көрсетілген: \bar{G} – дене салмағы, \bar{F} – сыртқы күш, \bar{N} – жазықтықтың нормаль реакциясы және \bar{F}_f –



10.4-сурет

үйкеліс күші. Егер денеге $\bar{F}_{ек}$ екпін күшін үдеудің бағытына кері бағыттап түсірсек, онда координат өстерін суретте көрсетілгендей қабылдап, екі тепе-теңдік тендеуін аламыз:

$$\Sigma X = 0; F \cos \alpha - fN - F_{ек} = 0,$$

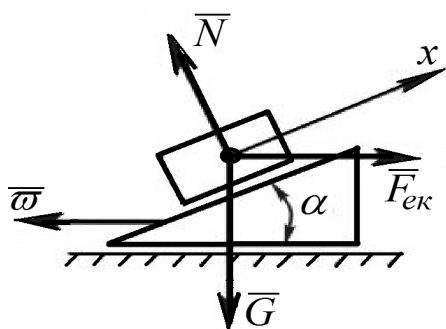
$$\Sigma Y = 0; F \sin \alpha - G + N = 0,$$

мұндағы $F_{ек} = m\varpi = \frac{G}{g}\varpi$.

Осы теңдеулерді бірге шеше отырып,

$$F = \frac{G\left(f + \frac{\varpi}{g}\right)}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = \frac{(gf + \varpi)}{g(\cos \alpha + f \sin \alpha)} G.$$

2-мысал. Массасы $m = 1 \text{ кг}$ дене еңкіштік бұрыш $\alpha = 30^\circ$ призманың бетімен жылжиды (10.5-сурет). Дене призмаға қатысты қозғалмайтын қалпында қалуы үшін призма горизонталь жазық бетімен қандай үдеумен қозғалатынын анықтаңыз. Дене мен призма арасында сырғанау үйкелісі жоқ деп қарастырыңыз.



10.5-сурет

Шешуі: Денеге түсірілген күштерді көрсетейік: $\bar{G} = m\bar{g}$ – ауырлық күші, \bar{N} – нормаль реакциясы және модулі $F_{ек} = m\varpi$, үдеудің бағытына кері бағытталған $\bar{F}_{ек}$ екпін күші.

x өсін \bar{N} реакциясына перпендикуляр етіп денемен байланыстырамыз. Барлық күштерді x өсіне проекциялаймыз

$$F_{ек} \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0,$$

яғни кинетостатика теңдеуін тұрғызамыз, мұнан екпін күшін

$$F_{ек} = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

және призманың үдеуін анықтаймыз

$$m\varpi = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha ,$$

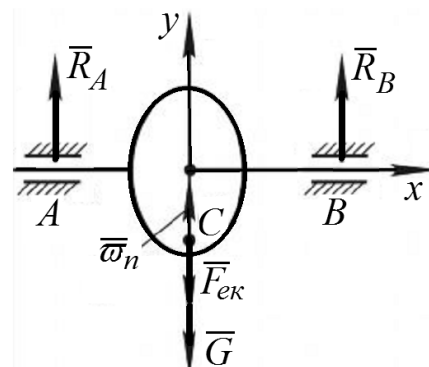
$$\varpi = g \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

Мұнан α бұрышы неғұрлым үлкен болса, үдеу соғұрлым үлкен болады. α бұрышы $\frac{\pi}{2}$ -ге ұмтылғанда, үдеу шексіздікке ұмтылады.

3-мысал. Тегершік доңғалағының ауырлық центрі C оның айналу өсіне қатысты 1 мм жылжытылған. Айналу білігі горизонталь орналасқан (10.6-сурет). Доңғалақ біліктің ортасына орнатылған және екі подшипниктің арасында бірқалыпты $n = 1200 \text{ айн/мин}$ айналады, массасы $m = 300 \text{ г}$. Подшипниктің статикалық және қосымша динамикалық реакцияларын анықтаңыз.

Шешуі: Алдымен біліктің өсіне перпендикуляр бағытталған, подшипниктің статикалық реакцияларын, оларды R_{1A}, R_{1B} деп белгілеп, анықтайық. Барлық күштерді y өсіне проекциялаймыз

$$R_{1A} + R_{1B} - G = 0 .$$



10.6-сурет

Бұл теңдеуге екпін күші енгізбейді. Тегершік біліктің ортасында орналасқандықтан, статикалық реакциялар өзара тең және олардың мәндері

$$R_{1A} = R_{1B} = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2} \text{ немесе } R_{1A} = R_{1B} = 150 \text{ Н} .$$

Қосымша динамикалық реакцияларды R_{2A}, R_{2B} анықтау үшін, тегершіктің $\bar{F}_{ек}$ екпін күшін енгізіп, кинетостатика әдісін қолданамыз. Тегершік бірқалыпты айналатын болғандықтан, C ауырлық центрінде білік өсіне бағытталған және $\omega^2 \cdot OC$ тең, нормаль үдеуі $\bar{\omega}_n$ туындайды. Мұнда ω – тегершіктің айналуының

бұрыштық жылдамдығы; OC – біліктің өсіне қатысты тегершіктің ауырлық центрінің ығысуы.

Екпін күшінің шамасы

$$F_{ек} = m\omega^2 \cdot OC.$$

Бұрыштық жылдамдықты анықтаймыз

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \text{ немесе } \omega = \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 40\pi \text{ рад/с}.$$

Кинетостатика теңдеуінің y өсіне проекциясын тұрғызамыз

$$R_{2A} + R_{2B} - F_{ек} = 0.$$

Мұнда ауырлық күші есепке алынбайды.

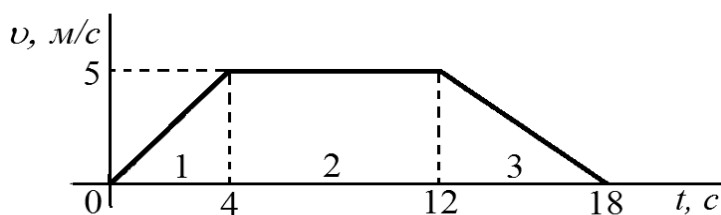
Қосымша динамикалық реакцияларды R_{2A}, R_{2B} анықтаймыз:

$$R_{2A} = R_{2B} = \frac{F_{ек}}{2} \text{ немесе } R_{2A} = R_{2B} = \frac{1}{2} m\omega^2 \cdot OC,$$

$$R_{2A} = R_{2B} = 2400 \text{ Н}.$$

Статикалық және қосымша динамикалық реакцияларды салыстырып, соңғысының біріншісінен 1,6 есе жоғары екенін көреміз. Сонымен қатар динамикалық реакция бұрыштық жылдамдықтың квадратына пропорционал екенін де аңғарамыз, демек, оны жоғарылатсақ, реакциялар квадраттың заңымен өседі.

4-мысал. Массасы $m = 2800 \text{ кг}$ лифттің көтерілу жылдамдығының графигі белгілі (10.7-сурет). Лифтінің барлық қозғалысындағы лифт ілінген арқанның керілу күшін анықтаңыз.



10.7-сурет

Шешуі: 1. Үдемелі көтерілу – 1 аралықты қарастырамыз. Есептеу схемасы (10.8-сурет). Лифт кабинасының тепе-теңдік теңдеуі (10.8, а-сурет):

$$\sum Y = 0; T_1 - G - F_{ек1} = 0; T_1 = G + F_{ек1} = mg + m\varpi_1,$$

мұнда T – арқанның керілуі; G – ауырлық күші; $F_{ек1}$ – арқанды созушы екпін күші.

1-аралықтағы үдеуін анықтау үшін осы аралықта қозғалыстың бірқалыпты айнымалы екенін ескереміз. Жылдамдық $v = v_0 + \varpi t; v_0 = 0$.

Демек, жылдамдық:

$$\varpi_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ м/с}.$$

Жүктің үдемелі көтерілгендегі арқанның керілу күшін анықтаймыз

$$T_1 = 2800(9,81 + 1,25) = 30968 \text{ Н};$$

$$T_1 = 30,97 \text{ кН}.$$

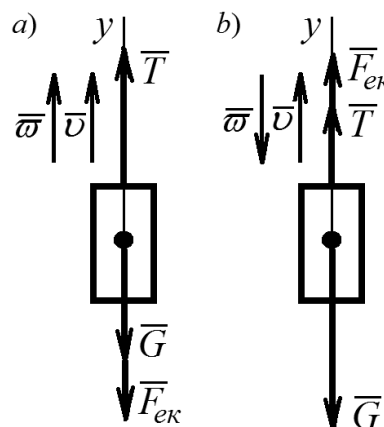
2. Бірқалыпты көтерілу – 2-аралықты қарастырамыз. Үдеу мен екпін күші нөлге тең. Бұл жағдайда арқанның керілуі ауырлық күшіне тең.

$$T_2 - G = 0; T_2 = G = mg; T_2 = 2800 \cdot 9,81 = 28 \text{ кН}.$$

3. Тежемелі көтерілу – 3-аралық. Бұл жағдайда үдеу қозғалыс бағытына кері бағытталады (10.8, b-сурет).

Тепе-теңдік теңдеуі:

$$\sum Y = 0; T_3 - G + F_{ек3} = 0; T_3 = G - F_{ек3} = mg + m\varpi_3.$$



10.8-сурет

Осы арадағы қозғалыс тежемелі болғандықтан, $v = 0$, ендеше,

$$v = v_0 + a_3 t_3 = 0; \quad a_3 = -\frac{v_0}{t_3} = -\frac{5}{6} \text{ кН}.$$

Лифтінің тежемелі қозғалып тоқтағанға дейінгі арқанның керілу күші:

$$T_3 = 2800 \cdot \left(9,81 - \frac{5}{6}\right) = 25144 \text{ Н}; \quad T_3 = 25,14 \text{ кН}.$$

Демек, арқанның керілуі әрбір көтерілу мен түсуде өзгереді, сондықтан арқанның үзілуі материалдың қажуымен байланысты. Жұмыс жасау қабілеттілігі уақытқа тәуелді.

Жаттығу есептері

1-есеп. Горизонтпен $\alpha = 30^\circ$ бұрыш жасайтын көлбеу жазықтық бойымен v жылдамдықпен түсіп келе жатқан, массасы $m = 1 \text{ кг}$ материялық нүктеге әсер ететін кедергі күштің шамасы $r = 0,11v$. Нүктенің максималь жылдамдығын анықтаңыз.

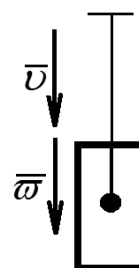
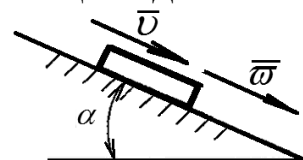
2-есеп. Массасы $m = 19,6 \text{ кг}$ материялық нүкте теңдеуі $y = 0,5x^2$ параболаның бойымен $v = 5 \text{ м/с}$ тұрақты жылдамдықпен қозғалып келеді. Нүктенің абсциссасы $x = \frac{4}{3}$ -ке тең болған сәттегі екпін күшін анықтаңыз. Бастапқы сәтте нүкте параболаның төбесінде болды.

3-есеп. Массасы $m = 60 \text{ кг}$ жүк $\varphi = 0,6t^2$ теңдеуіне сай айналатын, радиусы $r = 0,4 \text{ м}$ шығыршыққа оралған жіпке ілінген. Жіптің керілу күшін анықтаңыз.

4-есеп. Ұзындығы l -ге тең жіпке байланған тас горизонталь жазықтықта $v \text{ м/с}$ жылдамдықпен айналады. Жылдамдықты екі есе арттырғанда, жіптің керілу күші өзгермеуі үшін жіптің ұзындығын қалай өзгерту қажет?

Қайталау сұрақтары:

1. Екпін және екпін күші ұғымдарының арасындағы айырмашылығын түсіндіріңіз.
2. Екпін күшінің модулі мен бағыты қалай бағытталады?
3. Екпін күші қайда түсіріледі?
4. Кинетостатика принциптік мағынасы неде?
5. Материалық нүкте үшін Даламбер принципі қалай оқылады?
6. Көлбеу жазықтықпен төмен қозғалатын дене әсер ететін күштерді көрсетіңіз. Даламбер принципін қолданып, тепе-теңдік теңдеуін тұрғызыңыз.
7. Үдемелі төмен түсетін лифтінің кабинасына әсер ететін күштерді көрсетіңіз. Кинетостатика принципін қолданып, тепе-теңдік теңдеуін тұрғызыңыз.
8. Материалық нүктенің қозғалысы $s = 8,6t^2$ теңдеуімен берілген. Нүктенің он секунд қозғалысының соңындағы жылдамдығын анықтаңыз.
9. Статикалық және динамикалық әсерлер туралы түсініктер беріңіз.
10. Статикалық теңгерілу қандай жағдайда орындалады?
11. Динамикалық теңгерілу қандай жағдайда орындалады?
12. Еркін айналу өсі туралы түсінік беріңіз.

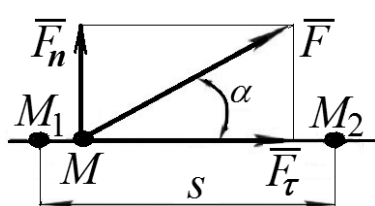


ТӨРТІНШІ БӨЛІМ. ЖҰМЫС ЖӘНЕ ҚУАТ

11-тарау. ЖҰМЫС

11.1. Тұрақты күштің түзу сызықты қозғалыстағы жұмысы

Тұрақты \vec{F} күші түсірілген материалдық M нүктесін қарастырайық. Нүкте ілгерлемелі түзу сызықты қозғалып, M_1 нүктесінен M_2 нүктесіне орын ауыстыра s жол жүреді делік (11.1-сурет).



11.1-сурет

\vec{F} күшінің s жолындағы әсерінің сандық мөлшерін анықтау үшін осы күшті нүктенің қозғалыс бағытына перпендикуляр және бағыттас тиісті құраушы \vec{F}_n және \vec{F}_τ күштерге жіктейміз. \vec{F}_n құраушысы нүктені s бағытында қозғалтада және оның қозғалысына қарсылық та келтіре алмайды, онда \vec{F} күшінің s жолындағы әсерін $F_\tau s$ көбейткісімен анықтауға болады. Осы жаңа шама **жұмыс** деп аталады және A әрімен белгіленеді. Демек,

$$A = F_\tau s = Fs \cdot \cos \alpha, \quad (11.1)$$

яғни, **күштің жұмысы** \vec{F} күштің модулін s орын ауыстыруға және күш пен орын ауыстыру бағыттарының арасындағы α бұриштың косинусына көбейткенге тең.

Жұмыс – скалярлық шама.

Жұмысты есептеудің дербес үш жағдайын қарастырамыз: 1) $\alpha = 0$ болғанда, $A = Fs$; 2) $\alpha = 90^\circ$ болғанда, $A = 0$; 3) $\alpha = 180^\circ$ болғанда, $A = -Fs$.

Жұмыс таңбасының мағынасы мынадай: егер күштің жанама құраушысы қозғалыс бағытымен бағыттас болса, яғни күш қозғалысты үдететін болса, жұмыс – оң таңбалы; керісінше, егер күштің жанама құраушысы қозғалыс бағытына кері бағытталған болса, яғни күш қозғалысты баяулататын болса, жұмыс – теріс таңбалы. Егерде күштің бағыты орын ауыстыру бағытына перпендикуляр болса, бұл күштің жұмысы нөлге тең. Мысалы, жүкті

жоғары көтергенде оның ауырлық күшінің жұмысы теріс таңбалы, төмен түсіргенде – оң таңбалы, ал горизонталь жазықтағы қозғалыста ауырлық күшінің жұмысы нөлге тең.

Оң таңбалы жұмыс жасайтын күшті **қозғаушы күш** деп, теріс таңбалы – **кедергі күш** деп аталады.

Жұмыс бірлігі: $[A] = [F][s] = \text{ньютон} \times \text{метр} = \text{джоуль (Дж)}$.

11.2. Қисық сызықты қозғалыстағы айнымалы күштің жұмысы

\vec{F} – күші әсерінен материялық нүкте, түзу сызықты деп қарастыруға болатын, элементарлық ds орын ауыстырса, онда \vec{F} күшінің элементарлық жұмысы (11.2-сурет) былай жазылады:

$$dA = F_{\tau} ds, \quad (11.2)$$

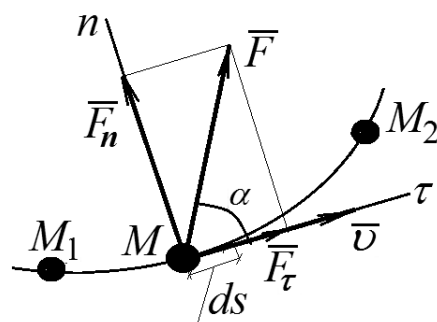
мұнда $F_{\tau} = \vec{F}$ күшінің жылдамдық бағытындағы немесе элементарлық орын ауыстырулар бойындағы проекциясы.

Элементарлық жұмыс – скалярлық шама. Оның таңбасы күш проекциясы F_{τ} -ға байланысты, себебі ds – әр уақытта оң сан, $F_{\tau} > 0$ болса, элементарлық жұмыс $dA > 0$, егерде $F_{\tau} < 0$ болса, керісінше, $dA < 0$. Себебі

$F_{\tau} = F \cos \alpha$, бұндағы α – \vec{F} күші мен нүкте жылдамдығы \vec{v} арасындағы бұрыш, осыларға сәйкес (11.2) формуланы былай жазуға болады:

$$dA = F ds \cos \alpha. \quad (11.3)$$

Сонымен, күштің элементар жұмысы күштің элементар орын ауыстыру бағытына F_{τ} проекциясын элементар ds орын ауыстыруға көбейткенге тең немесе күштің элементар жұмысы \vec{F} күштің модулін элементар ds орын ауыстыруға және күш пен орын ауыстыру бағыттарының арасындағы α бұрыштың косинусына көбейткенге тең.



11.2-сурет

Бұл формулада \vec{F} және ds оң таңбалы, сондықтан да $\cos \alpha$ таңбасы dA таңбасын анықтайды. Егерде α бұрышы сүйір болса, жұмыс – оң таңбалы, егер α бұрышы доғал болса, жұмыс – теріс таңбалы.

(11.3) формуладан алатынымыз:

$$\alpha = 0^\circ, \quad dA = F ds.$$

$$\alpha = 90^\circ, \quad dA = 0.$$

$$\alpha = 180^\circ, \quad dA = -F ds.$$

Осыдан мынадай қорытынды шығады: *егерде күш элементарлық орын ауыстыруға перпендикуляр болса, бұл күштің элементарлық жұмысы нөлге тең.* Демек, күштің нормаль құраушысының \vec{F}_n элементарлық жұмысы нөлге тең.

Бұл формуланы басқаша түрге келтіруге болады. Кинематика бөлімінен белгілі болғандай, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; $v = \frac{ds}{dt}$. Мұнан $d\vec{r} = \vec{v} dt$, ал $ds = v dt$, олай болса, $ds = |d\vec{r}|$. Сондықтан (11.3) формуланы мына түрге:

$$dA = F |d\vec{r}| \cos \alpha = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (11.4)$$

немесе:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (11.5)$$

келтіре аламыз.

Сонымен, *күштің элементар жұмысы күштің элементар импульсі мен нүкте жылдамдығының скалярлық көбейтіндісіне тең.*

Күш \vec{F} және \vec{r} радиус-векторды координат өстеріне жіктеп жазсақ, онда

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}; \quad \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Соңғы формуладан

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$

шығады.

Бұл шамаларды (11.5) формулаға қойсақ, dA мынаған тең:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (11.6)$$

Жазылған (11.6) формула *элементарлық жұмысты анықтаудың аналитикалық түрі* деп аталады. Элементарлық жұмыстың (11.6) формуладағы түрі толық дифференциал түріне ұқсас болғанмен, толық дифференциал емес. Егерде әсер етуші күштер потенциалдық стационар күштер болса, элементарлық жұмыс толық дифференциал болады.

Кезкелген шекті $M_1 M_2$ орын ауыстырудағы жұмыс (11.2-сурет) сәйкес элементар жұмыстардың интегралдық қосындысымен есептеледі және оны мына түрде жазуға болады:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F_\tau ds, \quad (11.7)$$

немесе

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \bar{F} d\bar{r} = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (11.8)$$

Демек, кез келген орын ауыстырудағы күштің жұмысы элементар жұмыстан осы орын ауыстыру бойымен алынған интегралға тең. Мұндағы $t_0 = 0$ сәтте нүкте M_1 -де, t сәтте нүкте M_2 -ге қозғалады.

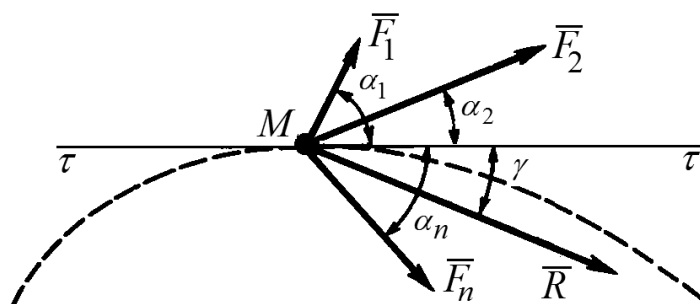
11.3. Тең әсер күштің жұмысы туралы теорема

Теорема. *Тең әсер күштің қандай да бір орын ауыстыруындағы жұмысы құраушы күштердің сол орын ауыстырудағы жұмыстарының алгебралық қосындысына тең.*

Материялық нүктеге тең әсерлі күші \bar{R} болатын $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ күштер жүйесі әсер етеді делік (11.3-сурет).

Материялық нүктеге әсер ететін күштер жүйесі жинақталатын күштер жүйесін құрады, олай болса, осы күштердің тең әсер күші:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n.$$



11.3-сурет

Осы векторлық теңдеуді траекторияның жанамасына проекциялайық:

$$R \cos \gamma = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + \dots + F_n \cos \alpha_n.$$

Енді теңдіктің екі жағын ds орын ауыстыруына көбейтіп және қандай да бір шекті s орын ауыстыру аралығында интегралдаймыз:

$$\int_0^s R \cos \gamma ds = \int_0^s F_1 \cos \alpha_1 ds + \int_0^s F_2 \cos \alpha_2 ds + \dots + \int_0^s F_n \cos \alpha_n ds.$$

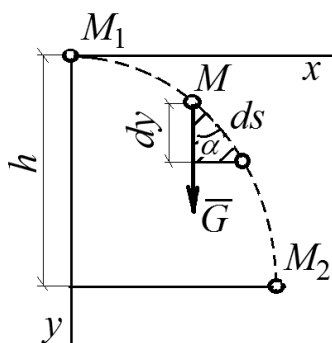
(11.7) теңдіктің негізінде,

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (11.9)$$

Снымен теорема дәлелденді.

11.4. Ауырлық күштің жұмысы туралы теорема

Теорема. *Ауырлық күштің жұмысы траекторияның түріне тәуелді емес және күштің модулін оның түсірілген нүктесінің вертикаль орын ауыстыруына көбейткенге тең.*



11.4-сурет

Материялық M нүктесі тек \bar{G} ауырлық күштің әсерінен қозғалысқа түсіп, қандай да бір уақыт аралығында M_1 нүктесінен M_2 нүктесіне орын ауыстыра s жол жүреді делік (11.4-сурет).

M нүктесінің траекториясында түзу сызықты деп қарастыруға болатын, элементарлық ds аймағын қарастырып, оның ұштарының координат өстеріне параллель түзулер жүргізейік, олардың бірі – вертикаль, ал екіншісі – горизонталь. Айырықшаланған үшбұрыштан

$$dy = ds \cos \alpha$$

қатынасын аламыз.

\bar{G} ауырлық күштің ds жолындағы элементар жұмысы

$$A = \int_0^s G ds \cos \alpha = \int_0^s G dy = Gy = G \cdot h.$$

Демек,

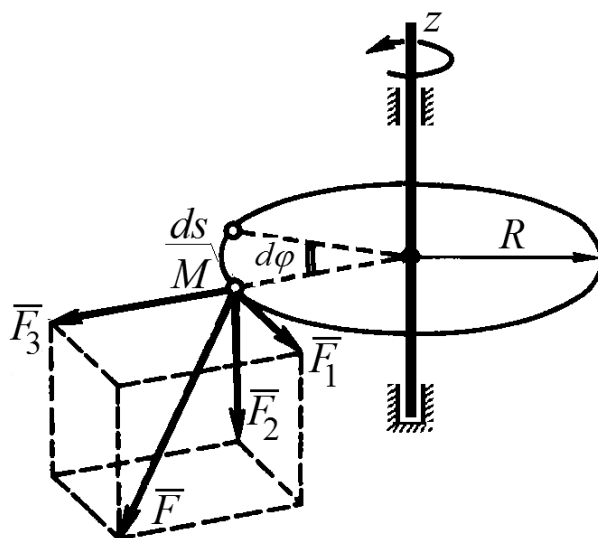
$$A = G \cdot h. \quad (11.10)$$

(11.10) өрнектен ауырлық күштің жұмысы нүкте траекториясының түріне тәуелсіз екенін аңғаруға болады. Осындай күштерді **потенциал күштер** деп атайды.

11.5. Айналыстағы денеге түсірілген тұрақты күштің жұмысы

Тұрақты күш \bar{F} әсерінен қозғалмайтын өс төңірегінде айналмалы қозғалатын дискіні және күштің түсу нүктесі де дискімен бірге орын ауыстыратынын елестетейік (11.5-сурет). \bar{F} күшін өзара перпендикуляр үш құраушы күштерге жіктейік: \bar{F}_1 – шеңберлік күшке, \bar{F}_2 – өстік күшке, \bar{F}_3 – радиаль күшке.

Диск шексіз аз $d\varphi$ бұрышына бұрылғанда, \bar{F} күші элементар жұмыс жасайды, тең әсер күштің жұмысы туралы теорема негізінде, құраушы күштердің жұмыстарының алгебралық қосындысына тең. \bar{F}_2 және \bar{F}_3 күштерінің жұмысы нөлге тең, өйткені бұл күштердің векторлары түсу нүктесінің M шексіз



11.5-сурет

аз ds орын ауыстыруына перпендикуляр. Демек, \bar{F} күшінің элементар жұмыс \bar{F}_1 құраушысының жұмысына тең:

$$dA = F_1 ds = F_1 R d\varphi. \quad (11.11)$$

Диск шекті φ бұрышына бұрылғандағы \bar{F} күшінің жұмысы

$$A = \int_0^{\varphi} F_1 R d\varphi = F_1 R \int_0^{\varphi} d\varphi = F_1 R \varphi, \quad (11.12)$$

мұнда φ бұрышы радианмен өрнектеледі.

\bar{F}_2 және \bar{F}_3 күштерінің айналу өсіне z қатысты моменттері нөлге тең болғандықтан, Вариньон теоремасы негізінде \bar{F} күшінің өсіне z қатысты моменті $M_z(\bar{F}) = F_1 R$.

Дискіге түсірілген күштің айналу өсіне қатысты моменті **айналдыру моменті** деп аталады, ИСО стандартына сәйкес, T деп белгіленеді:

$$T = M_z(\bar{F}),$$

демек,

$$A = T\varphi. \quad (11.13)$$

Айналатын денеге түсірілген тұрақты күштің жұмысы айналдыру моменті мен бұрыштық орын ауыстыруының көбейтіндісіне тең.

11.6. Қуат

Кез келген күштің жасайтын жұмысы әртүрлі уақыт аралығында орындалуы мүмкін. Жұмыстың қаншалықты тез орындалатынын сипаттау үшін механикада **қуат** деген ұғым енгізілген, N деп белгіленеді.

Күштің қуаты деп күштің уақыт бірлігіндегі жасайтын жұмысын анықтайтын шаманы айтады.

Егер жұмыс бірқалыпты орындалатын болса, онда қуат келесі формуламен есептеледі:

$$N = \frac{A}{t}$$

Егер күштің бағыты мен орын ауыстыру бағыттары сәйкес келсе, онда формуланы былайша түрлендіріп жазуға болады:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Fs}{t} \text{ немесе } N = Fv. \quad (11.14)$$

Осы өрнектен мынадай қорытынды шығады: **қуат күш пен нүкте жылдамдығының скалярлық көбейтіндісіне тең**. Бұл формуладан көретініміз – егерде қуат тұрақты болса, аз жылдамдыққа көп күш, үлкен жылдамдыққа аз күш сәйкес келеді.

Қуаттың СИ жүйесіндегі өлшем бірлігі

$$[N] = \frac{[A]}{[t]} = \text{дж} / \text{с} = \text{ват} (\text{Вт}).$$

Егер жұмыс айналатын денеге түсірілген тұрақты күшпен бірқалыпты орындалатын болса, онда күштің қуаты мына формуламен есептеледі:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{T\varphi}{t} \text{ немесе } N = T\omega. \quad (11.15)$$

Сонымен, **айналмалы қозғалыстағы денеге әсер ететін күштің қуаты айналдырушы момент пен дененің бұрыштық жылдамдығының көбейтіндісіне тең**. Егер қуатты тұрақты десек, онда неғұрлым аз бұрыштық жылдамдыққа соғұрлым үлкен айналдырушы момент, ал үлкен бұрыштық жылдамдыққа аз айналдырушы момент шамасы сәйкес келеді.

11.7. Пайдалы әсер коэффициенті

Әрбір машина мен механизмдер жұмыс жасай отырып, энергиясының бір бөлігін зиянды кедергілерді жеңу үшін жұмсайды.

Сонымен, машина (механизм) пайдалы жұмыс A_n жасаумен қатар, қосымша жұмыс $A_{з.к.}$ – зиянды кедергі жұмысын жасайды.

Пайдалы жұмыстың машинаның толық жұмысына немесе пайдалы қуаттың барлық жұмсалған қуатқа қатынасы **пайдалы әсер коэффициенті (ПӘК)** деп аталады және η әрпімен белгіленеді:

$$\eta = \frac{A_n}{A_m}, \quad (11.16)$$

мұндағы A_m – толық жұмыс.

(11.16) формуладан ПӘК өлшем бірліксіз шама екенін аңғарамыз.

Пайдалы жұмыс (қуат) машина (механизм) берілген жылдамдықпен қозғалуына жұмсалады және келесі формулалармен анықталады:

$$A_n = Fs \cdot \cos \alpha, \quad N_n = Fv \cos \alpha;$$

$$A_n = T\varphi, \quad N_n = T\omega.$$

Машинаның жұмыс атқарушы тетіктерінің тағайындалған қозғалысындағы, оларға түсірілген барлық күштердің жұмыстарының қосындысы нөлге тең болады, яғни

$$\Sigma A = A_m - A_n - A_{з.к.} = 0,$$

бұдан

$$A_m = A_n + A_{з.к.}; \quad A_n = A_m - A_{з.к.}.$$

(11.16) формулаға A_n енгізе отырып

$$\eta = \frac{A_n}{A_m} = \frac{A_m - A_{з.к.}}{A_m} = 1 - \frac{A_{з.к.}}{A_m}. \quad (11.17)$$

Машинаның $A_{з.к.}$ зиянды кедергі жұмысы еш уақытта нөлге тең болмайды, онда $\frac{A_{з.к.}}{A_m} > 0$ және $\eta < 1$.

Демек, ПӘК көтеру үшін зиянды кедергілерді азайту қажет, сонда ПӘК 1-ге ұмтылады.

Егер (11.16) қатынасының алымын және бөлімін t уақытына бөлсек, онда қуат арқылы өрнектелген ПӘК аламыз

$$\eta = \frac{N_n}{N_m}. \quad (11.18)$$

11.8. Есептерді шешудің әдістемесі

1-мысал. Массасы 200 кг дене көлбеу жазықтықпен көтеріледі (11.6-сурет). Тұрақты жылдамдықпен 10 м қозғалғандағы жұмысты анықтаңыз. Дене мен жазықтық арасындағы үйкеліс коэффициенті $f = 0,15$. $\alpha = 45^\circ$.

Шешуі: Дененің бірқалыпты көтерілгендегі қозғалту күші қозғалысқа кедергі жасаушы барлық күштердің қосындысына тең:

$$\bar{F} = \bar{R} + \bar{F}_f;$$

$$R = G_y = G \cos \alpha; \quad F_f = f \cdot R = fG \cos \alpha;$$

$$\Sigma X = 0; \quad F = G_x + F_f.$$

Тең әсер күштің жұмысы теоремасын пайдаланамыз:

$$A(\bar{F}) = A(\bar{R}) + A(\bar{F}_f) + A(\bar{G});$$

$$A(\bar{R}) = 0; \quad A(\bar{G}) = A(\bar{G}_x).$$

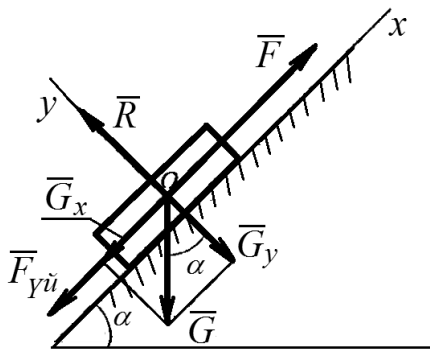
Дененің көтерілуіне кеткен жұмысты анықтаймыз:

$$A(\bar{F}) = F_f \Delta s + G_x \Delta s; \quad G = mg.$$

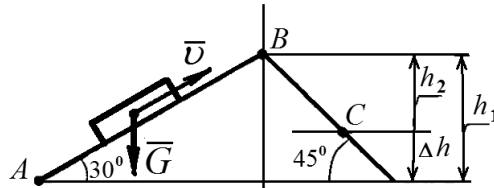
$$A(\bar{F}) = fG \cos \alpha \Delta s + G \sin \alpha \Delta s; \quad \Delta s = 10 \text{ м}, \quad \alpha = 45^\circ;$$

$$A(\bar{F}) = mg \Delta s (f \cos \alpha + \sin \alpha); \quad A(\bar{F}) = 200 \cdot 9,81 \cdot 10 (0,15 \cdot 0,707 + 0,707);$$

$$A(\bar{F}) = 15794 \text{ Дж}.$$



11.6-сурет



11.7-сурет

2-мысал. Жүктің көлбеу жазықтық бетімен A нүктесінен C нүктесіне орын ауыстырғандағы ауырлық күштің жұмысын анықтаңыз (11.7-сурет). $G = 1500 \text{ Н}$. $AB = 6 \text{ м}$, $BC = 4 \text{ м}$.

Шешуі: Ауырлық күштің жұмысы тек жүктің көтерілу биіктігінің өзгеруіне ғана тәуелді. A нүктесінен C нүктесіне орын ауыстырғандағы биіктіктің өзгеруі:

$$\Delta h = h_1 - h_2; \quad \Delta h = AB \sin 30^\circ - BC \sin 45^\circ;$$

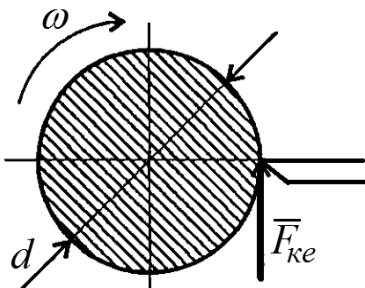
$$\Delta h = 6 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,7 = 0,2 \text{ м}.$$

Ауырлық күш жұмысы:

$$A(\bar{G}) = G \cdot \Delta h = 1500 \cdot 0,2 = 300 \text{ Дж}.$$

3-мысал. Кесу күшінің 3 мин аралығындағы жұмысын анықтаңыз (11.8-сурет). Тетіктің айналу жылдамдығы 120 айн/мин , болат дайындаманың диаметрі $d = 40 \text{ мм}$, кесу күші $F_{\text{кес}} = 1 \text{ кН}$.

Шешуі: Айналма қозғалыстың жұмысы



11.8-сурет

$$A = F_{\text{кес}} \frac{d}{2} \varphi.$$

Берілген уақыттағы айналу саны $z = 120 \cdot 3 = 360 \text{ айн}$.

Осы уақыттағы бұрылу бұрышы $\varphi = 2\pi \cdot z$.
 $\varphi = 2 \cdot 3,14 \cdot 360 = 2261 \text{ рад}$.

3 мин аралығындағы жұмыс $A = 1 \cdot 0,02 \cdot 2261 = 45,2 \text{ кДж}$.

4-мысал. Салмағы $G = 3 \text{ кН}$ жүкті $2,5 \text{ с}$ аралығында 10 м көтеруге лебедка моторының қажетті қуаты қандай болуы керек (11.9-сурет)? Лебедка механизмнің ПӘК-і – $0,75$.

Шешуі: Мотордың қуаты жүкті белгілі жылдамдықпен көтеруге және лебедке механизмдерінің зиянды кедергілерін жоюға жұмсалады.

Жүк ілгерілемелі қозғалатындықтан, пайдалы қуат $N_n = Fv$.

Жүктің көтерілу жылдамдығы

$$v = \frac{s}{t} = \frac{10}{2,5} = 4 \text{ м/с}, \text{ олай болса, пайдалы қуат-}$$

тың шамасы $N_n = 3000 \cdot 4 = 12000 \text{ Вт}$.

$$\text{Мотордың жұмсайтын толық қуаты } N_{\text{мотор}} = \frac{N_n}{\eta} = \frac{12}{0,75} = 16 \text{ кВт}.$$

5-мысал. Қайрақтың тасы өңделетін тетікке $1,5 \text{ кН}$ күшпен қысылады (11.10-сурет). Егер тас материалының тетікпен үйкелу коэффициенті $0,28$ болса, тетікті өңдеуге қандай қуат жұмсалады. Тетік 100 айн/мин жылдамдығымен айналады, тетіктің диаметрі 60 мм .

Шешуі: Тетіктің кесілуі қайрақтың тасы мен өңделетін тетік арасындағы үйкеліс нәтижесінде жүзеге асады:

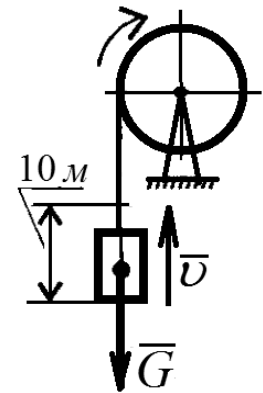
$$F_{\text{кес}} = F_f = fQ; \quad F_{\text{кес}} = 0,28 \cdot 1,5 = 0,42 \text{ кН}.$$

Кесу күшінің моменті

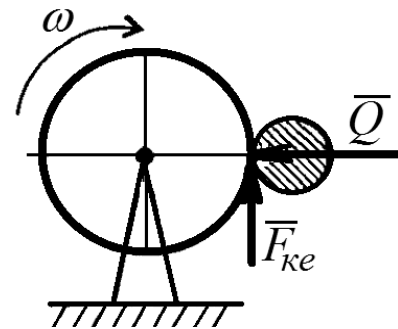
$$M = F_f \cdot \frac{d}{2}; \quad M = 420 \cdot 0,03 = 12,6 \text{ Нм}.$$

Тетіктің айналуының бұрыштық жылдамдығы

$$\omega = \frac{3,14 \cdot 100}{30} = 10,47 \text{ рад/с}.$$



11.9-сурет



11.10-сурет

Тетікті өңдеуге қажетті қуат

$$N = M\omega; \quad N = 12,6 \cdot 10,47 = 132 \text{ Вт}.$$

Жаттығу есептері

1-есеп. Массасы $m=2$ кг материялық нүкте M радиусы $R=4$ м шеңбер доғасы бойымен қозғалады. Нүкте M A – орнынан B – орнына орын ауыстырғанда, салмақ күшінің жұмысын анықтаңыз.

2-есеп. Массасы $m=7$ кг материялық нүктенің 10 м биіктіктен құлағандағы салмақ күшінің жұмысын есептеңіз.

3-есеп. Массасы 1000 кг вагон горизонталь жолмен 5 м қозғалады. Үйкеліс коэффициенті – $0,15$. Ауырлық күштің жұмысын анықтаңыз.

4-есеп. Горизонталь түзудің бойымен қозғалатын массасы $m=3$ кг материялық нүкте тыныштық күйінен бастап, осы түзудің бойымен бағытталған $F = 6$ Н күші әсерімен қозғалады. Нүктенің $t = 4$ с уақыт ішіндегі жүрген жолын табыңыз.

5-есеп. Егер қозғалтқыштың қуаты $12,5$ кВт және қозғалыстың жалпы кедергі күші 2 кН болса, механизмнің ПӘК-і неге тең болады? Қозғалыс жылдамдығы – 5 м/с.

Қайталау сұрақтары

1. Жұмыс және қуат ұғымдарын қалай түсінесіз?
2. Ілгерілемелі және айналмалы қозғалыстың жұмысын есептеу формуласын жазыңыз.
3. Горизонталь қозғалған дененің ауырлық күшінің жұмысы неге тең?
4. Ілгерілемелі және айналмалы қозғалыстың қуатын есептеу формуласын жазыңыз.
5. СИ жүйесінде жұмыстың, қуаттың және ПӘК-тің өлшем бірліктері қандай?
6. Пайдалы әсер коэффициенті нені сипаттайды?

БЕСІНШІ БӨЛІМ. МАТЕРИАЛЫҚ НҮКТЕ ДИНАМИКАСЫНЫҢ ЖАЛПЫ ТЕОРЕМАЛАРЫ

Материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуін тек жекелеген жағдайларда ғана оңай интегралдауға болады.

Көптеген жағдайда динамиканың жалпы теоремалары деп аталатын қозғалыс мөлшері және қозғалыс мөлшері моменті кинетикалық энергия теоремаларын қолдану динамиканың есептерін шешуді айтарлықтай жеңілдетеді.

Бұл теоремалардың барлығы нүктенің координаты мен жылдамдығының және уақыттың арасындағы тәуелділікті сипаттайды. Ол өрнектерді нүктенің қозғалыс теңдеуінің бірінші интегралы деп те атайды. Олар нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуін әртүрлі түрлендіру нәтижесінде алынады.

12-тарау. ҚОЗҒАЛЫС МӨЛШЕРІ

12.1. Қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема

Материялық нүктенің қозғалыс мөлшері деп нүктенің массасы мен оның жылдамдығының көбейтіндісіне тең векторлық шаманы айтады:

$$Q = m\bar{v}. \quad (12.1)$$

Қозғалыс мөлшерінің бағыты жылдамдық векторының бағытымен сәйкес келеді. Қозғалыс мөлшерінің СИ жүйесіндегі өлшем бірлігі $[mv] = [m] \cdot [v] = \text{кг} \cdot \text{м/с}$.

Кез келген денелердің бір-біріне әсері белгілі бір уақыт аралығында қозғалыстың қандай да бір өзгеруіне әкеледі.

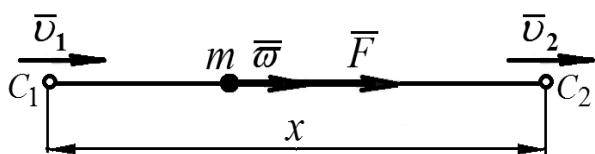
Шамасы мен бағыты тұрақты күштің импульсі – күш пен оның әсер ету уақытының көбейтіндісіне тең векторлық шама.

$$\bar{S} = \bar{F}t, \quad (12.2)$$

мұндағы $t = t_2 - t_1$ – күштің әсер ету уақыты.

Импульс векторының бағыты күш векторының бағытымен сәйкес келеді. Күш импульсі мен қозғалыс мөлшерінің өлшем бірліктері бірдей.

Массасы m материялық нүктенің тұрақты \bar{F} күшінің әсеріндегі түзу сызықты қозғалыстың қозғалыс мөлшерінің заңын орнатайық (12.1-сурет). Динамиканың негізгі заңына сәйкес, бұл жағдайда үдеу тұрақты, нүкте бірқалыпты қозғалады.



12.1-сурет

M нүктесінің кез келген уақыт мезетіндегі жылдамдығын бірқалыпты айнымалы қозғалыс формуласымен анықтаймыз

$$v_2 = v_1 + \omega t,$$

мұнан
$$\omega = (v_2 - v_1)/t.$$

Анықталған шаманы динамиканың негізгі заңына енгіземіз

$$F = m\omega = m(v_2 - v_1)/t$$

немесе

$$Ft = mv_2 - mv_1.$$

Ft көбейтіндісі әсер етуші күш импульсінің шамасы екенін ескерсек, онда ақырында материялық нүктенің **қозғалыс мөлшерінің өзгеруі** теңдеуін аламыз:

$$S = F(t_2 - t_1) = mv_2 - mv_1. \quad (12.3)$$

Сонымен, **қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема** тұжырымдамасы: *материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің берілген уақыт аралығындағы өзгерісі, ол нүктеге әсер етуші күштің (немесе күштердің тең әсерінің) сол уақыт аралығындағы импульсіне тең.*

Егер қозғалыс тежемелі болса ($v_2 < v_1$), күш векторы жылдамдық векторына қарама-қарсы бағытталады, демек, соңғы формулаға күшті теріс таңбамен қою қажет.

Материялық нүкте модулі мен бағытты айнымалы күш әсерінен қисық сызықты қозғалған жағдайында, толық жүріп өткен уақытын t

шексіз аз dt уақыт аралықтарына бөлсек, онда осы аралықтарда нүктені түзу сызықты қозғалады деп қарастыруға болады. Демек, нүктенің толық жүріп өткен уақыты t аралығындағы күш импульсі элементар импульстердің қосындысына тең. Бұл жағдайда қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теоремасының математикалық өрнегі келесі түрге келеді:

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \int_0^t \bar{F} dt. \quad (12.4)$$

Формула (12.4) материялық нүктенің **қозғалыс мөлшерінің интегралдық** түрі: *материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің берілген уақыт аралығындағы өзгерісі сол нүктеге әсер етуші күштің (немесе күштердің тең әсерінің) сол уақыт аралығындағы импульсіне тең.*

Есептерді шығарғанда, бұл формуланың координат өстеріндегі проекцияларын пайдаланған ыңғайлы:

$$\begin{cases} m v_x - m v_{0x} = S_x; \\ m v_y - m v_{0y} = S_y; \\ m v_z - m v_{0z} = S_z. \end{cases} \quad (12.5)$$

Егер материялық нүктеге бірнеше тұрақты күштер әсер ететін болса, онда *материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгерісі сол нүктеге әсер етуші күштердің (немесе күштердің тең әсерінің) импульстерінің қосындысына (алгебралық, егер күштер бір түзу бойынша әсер ететін болса немесе векторлық, егер күштер бір-біріне бұрышпен әсер етсе) тең:*

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \sum (\bar{F}_k t). \quad (12.6)$$

12.2. Қозғалыс мөлшері моментінің өзгеруі туралы теорема

Нүкте қозғалысын зерттегенде, кейбір жағдайда, қозғалыстың векторлық өлшемі қозғалыс мөлшерінің орнына оның моментінің өзгеруін қарастыру қажеттілігі туындайды.

Массасы m жылдамдығы \vec{v} материялық нүктенің берілген O центрге немесе z өске қатысты $m\vec{v}$ векторының моментін материялық нүктенің центрге (немесе өске) қатысты қозғалыс мөлшерінің моменті немес кинетикалық момент деп атайды.

$m\vec{v}$ векторының моменті күш моментіне ұқсас анықталады. Бұл жағдайда $m\vec{v}$ векторы қозғалыстағы нүктеге түсірілген деп есептеледі.

Кинетикалық моменті \vec{K}_O мынадай формуламен анықталады:

$$\vec{K}_O = \vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad (12.7)$$

мұндағы \vec{r} – қозғалыстағы нүктенің O центріне қатысты радиус-векторы. \vec{K}_O – векторы O центріне, $m\vec{v}$ векторы мен O центрі арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр бағытта түсіріледі (12.2-сурет). Оның модулі

$$|\vec{K}_O| = mvh, \quad (12.8)$$

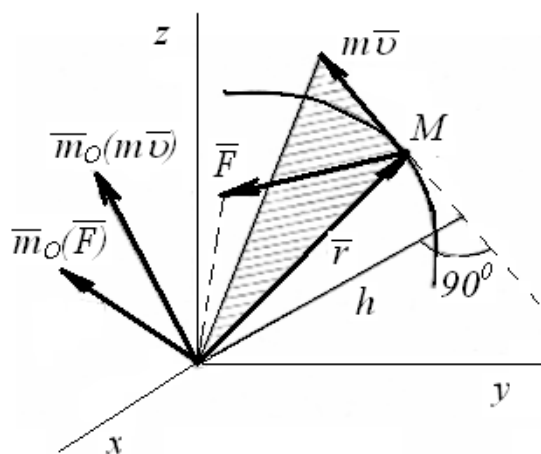
бұндағы h – O центрінен $m\vec{v}$ векторының әсер сызығына түсірілген перпендикулярдың ұзындығы.

Жазылған (12.8) формуланы декарттық координат өстеріне проекциялап, нүктенің осы өстерге қатысты кинетикалық моменттерін табамыз.

Егер де O центрі координат өстерінің басы болса, нүктенің осы центрге қатысты кинетикалық моментінің проекциялары мынаған тең:

$$\begin{cases} K_x = m(yv_z - zv_y); \\ K_y = m(zv_x - xv_z); \\ K_z = m(xv_y - yv_x); \end{cases} \quad (12.9)$$

мұндағы x, y, z – қозғалыстағы нүкте координаты, v_x, v_y, v_z – нүкте жылдамдығының координат өстеріндегі проекциялары.



12.2-сурет

Кинетикалық моменттің СИ жүйесіндегі өлшем бірлігі:

$$|\bar{K}_O| = m v h, [K_O] = [m v h] = [m] \cdot [v] \cdot [h] = \text{кг} \cdot (\text{м} / \text{с}) \text{м} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}.$$

\bar{F} күшінің әсерінен қозғалыстағы материялық нүктенің қандай да бір қозғалмайтын O центріне қатысты $m\bar{v}$ векторы мен \bar{F} күшінің моменттері арасындағы байланысты анықтайық.

Статика бөлімінен белгілідей, \bar{F} күшінің кез келген O центріне қатысты моменті

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}.$$

Кинетикалық момент, яғни $m\bar{v}$ векторының O центріне қатысты моменті

$$\bar{m}_O(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}.$$

$\bar{m}_O(m\bar{v})$ өрнегін уақыт бойынша дифференциалдап,

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} \right) + \left(\bar{r} \times m \frac{d\bar{v}}{dt} \right) = (\bar{v} \times m\bar{v}) + (\bar{r} \times m\bar{a})$$

өрнегін аламыз.

Екі параллель вектордың векторлық көбейтіндісі нөлге тең болатындықтан, $\bar{v} \times m\bar{v} = 0$, ал $m\bar{a} = \bar{F}$. Демек,

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} \quad \text{немесе} \quad \frac{d}{dt}(m_O(m\bar{v})) = m_O(\bar{F}). \quad (12.10)$$

Нәтижесінде **материялық нүктенің қозғалмайтын нүктеге қатысты кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теореманы** дәлелдедік. Оның тұжырымдамасы: *қандай да бір қозғалмайтын нүктеге қатысты материялық нүктенің кинетикалық моментінен уақыт бойынша алынған туынды нүктеге әсер ететін сыртқы күштің сол нүктеге қатысты моментіне тең.*

Осы теорема қандай да бір z өске қатысты $m\bar{v}$ векторы мен \bar{F} күшінің моменттері үшін де орындалады.

Оны көрсету үшін z өсіне қатысты $m\bar{v}$ векторы мен \bar{F} күшінің моменттерін қарастырайық. Статика бөлімінен белгілідей, \bar{F} күшінің кез келген z өсіне қатысты моменті

$$m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x.$$

Сол сияқты, $m\bar{v}$ векторының z өсіне қатысты моменті

$$m_z(m\bar{v}) = m(xv_y - yv_x).$$

Соңғы өрнектің екі жағынан уақыт бойынша туынды алсақ,

$$\frac{d}{dt}(m_z(m\bar{v})) = m\left(\frac{dx}{dt}v_y - \frac{dy}{dt}v_x\right) + \left(xm\frac{dv_y}{dt} - ym\frac{dv_x}{dt}\right)$$

өрнегін аламыз. Бұл өрнектің оң жағындағы бірінші жақша нөлге тең, өйткені

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y.$$

Динамиканың негізгі заңына байланысты

$$\frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = F_y,$$

олай болса, екінші жақша \bar{F} күшінің z өске қатысты моментін $m_z(\bar{F})$ береді.

Сонымен, нәтижесінде

$$\frac{d}{dt}(m_z(m\bar{v})) = m_z(\bar{F}) \quad (12.11)$$

теңдеуін аламыз.

Алынған теңдеу **кинетикалық моменттің қозғалмайтын өске қатысты өзгеру теоремасын** тұжырымдайды: қандай да бір өске қатысты алынған материялық нүктенің кинетикалық моментінің

уақыт бойынша алынған туындысы нүктеге әсер ететін сыртқы күштің сол өске қатысты моментіне тең.

(12.11) теңдеуінде $m_z(\bar{F})=0$ болса, онда $m_z(m\bar{v})=const$, яғни егер әсер ететін күштің қандай да бір өске қатысты моменті нөлге тең болса, онда нүктенің осы өске қатысты қозғалыс мөлшерінің моменті тұрақты шама болады.

13-тарау. КИНЕТИКАЛЫҚ ЭНЕРГИЯ. ЭНЕРГИЯНЫҢ САҚТАЛУ ЗАҢЫ

13.1. Кинетикалық энергияның өзгеруі туралы теорема

*Механикалық энергия деп орын ауыстырудың және денелердің өзара әсерлерінің энергиясын айтамыз. Механикалық энергияның негізгі екі түрі бар: **потенциалдық энергия** немесе **тыныштық энергия** және **кинетикалық энергия** немесе **қозғалыс энергия** бар.*

*Кинетикалық энергия қозғалыстағы нүктенің жұмыс жасау қабілетімен анықталады. Материялық нүктенің массасы мен оның жылдамдығы квадраты көбейтіндісінің жартысына тең скаляр шаманы **материялық нүктенің кинетикалық энергиясы** деп айтады. Егер нүктенің кинетикалық энергиясын T деп алсақ, онда ол мынадай формуламен анықталады:*

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (13.1)$$

Күш әсерінен нүктенің жылдамдығы \bar{v} өзгерді, сол себепті кинетикалық энергия да уақыт өткен сайын өзгеріп отырады. *Кинетикалық энергия – скалярлық шама және әрдайым оң таңбалы.*

Кинетикалық энергия өлшем бірлігі:

$$[T] = [mv^2] = [m] \cdot [v^2] = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = (1 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2) \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ Дж}.$$

Кинетикалық энергияның өлшем бірлігі жұмыстікіндей. Жұмыс пен кинетикалық энергия байланысын **кинетикалық энергияның өзгеруі туралы теорема орнатады**, ол былайша тұжырымдалады: *материялық нүктенің белгілі орын ауыстырудағы кинетикалық энергиясының өзгеруі осы нүктеге әсер етуші күштің сол орын ауыстырудағы жұмысына тең.*

Бұл теореманы нүктенің жалпылама қозғалысына, яғни материялық нүкте модулі мен бағытты айнымалы күш әсерінен қисық сызықты қозғалған жағдайы үшін дәлелдейік. Массасы m материялық нүктенің оған түсірілген күш әсерінен M_0 нүктесінен M_1

нүктесіне орын ауыстыруын қарастырайық (13.1-сурет). Нүктенің жылдамдығы M_0 жағдайында v_0 -ге, M_1 жағдайында v_1 -ге тең деп алайық.

Ізденді қатынастарды алу үшін динамиканың негізгі заңын өрнектейтін $m\bar{\omega} = \bar{F}$ теңдеуіне жүгінейік. Осы теңдіктің екі жағын да M нүктесінің траекториясына, қозғалыс бағытында жүргізілген $M\tau$ жанамаcына проекциялап,

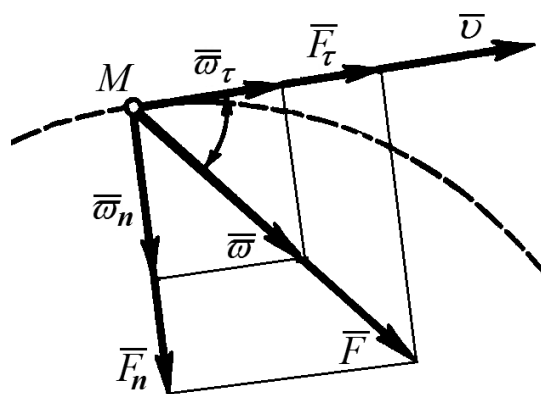
$$m\bar{\omega}_\tau = F_\tau \text{ немесе } m\bar{\omega} \cos \alpha = F \cos \alpha$$

өрнегін аламыз. Сол жағындағы жанама үдеудің шамасын былайша түрлендіруге болады:

$$\bar{\omega}_\tau = \bar{\omega} \cos \alpha = \frac{dv}{dt},$$

демек,

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos \alpha.$$



13.1-сурет

Теңдіктің екі жағын да ds -ке көбейтіп,

$$m \frac{dv}{dt} ds = F \cos \alpha \cdot ds$$

теңдігін аламыз.

Теңдіктің сол жағындағы өрнекті келесідей түрлендіреміз:

$$m \frac{dv}{dt} ds = m dv \frac{ds}{dt} = m v dv,$$

демек,

$$m v dv = F \cos \alpha \cdot ds.$$

Теңдіктің екі жағын да интегралдаймыз: жылдамдық үшін v_0 -ден v_1 -ге дейін және жол үшін 0 -ден s -ке дейін:

$$m \int_{v_0}^{v_1} v dv = \int_0^s F \cos \alpha ds,$$

демек

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \quad (13.2)$$

мұндағы $A - \bar{F}$ күшінің s жолдағы жұмысы.

Егер материялық нүктенің бастапқы орындағы кинетикалық энергиясын $-T_0$, ал соңғы орындағысын T_1 деп белгілесек, (13.2) теңдігін қысқа түрде былай жазамыз:

$$T_1 - T_0 = A. \quad (13.3)$$

Егер қозғалыс тежемелі болса ($v_1 < v_0$), жанама үдеу $\bar{\omega}_\tau$ туғызатын берілген күштің құраушысы \bar{F}_τ жылдамдық векторына қарама-қарсы бағытталады, демек, \bar{F} күшінің жұмысы теріс таңбалы болады.

Нормаль үдеу $\bar{\omega}_\tau$ туындайтын берілген күштің құраушысы \bar{F}_n жұмыс жасамайды, өйткені бұл құраушы әр мезетте \bar{F} күшінің түсу нүктесінің элементар орын ауыстыруына перпендикуляр.

Егерде материялық нүктеге бірнеше күш әсер етсе, онда кинетикалық энергияның өзгеруі осы күштердің жұмыстарының алгебралық қосындысына тең.

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k^e. \quad (13.4)$$

Бұл формуладағы $\sum A_k^e$ – нүктеге әсер ететін сыртқы күштердің жұмыстарының қосындысы.

14-тарау. ҚАТТЫ ДЕНЕ ДИНАМИКАСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ

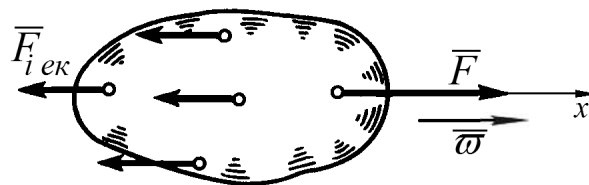
14.1. Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы

Материялық нүктелердің механикалық жүйесі деп қандай да бір амалмен өзара байланысқан материялық нүктелердің жиынын айтамыз. Кез келген денені материялық нүктелердің өзгермейтін механикалық жүйесі деп қарастыруға болады.

Материялық жүйе нүктелерінің өзара әсерлері *ішкі күштер* деп, ал жүйе нүктелерінің осы жүйеге кірмейтін нүктелер тарапынан алатын әсері *сыртқы күштер* деп аталады және олар тиісінше \vec{F}^i және \vec{F}^e деп белгіленеді.

Массасы m қатты дене \vec{F} күшінің әсерінен ілгерілемелі $\vec{\omega}$ жылдамдығымен қозғалады (14.1-сурет).

Денені бірқатар массасы m_i материялық нүктелерге бөлшектейік және Даламбер принципін қолданайық (атап өтейік, тепе-теңдік теңдеуіне ішкі күштер енбейді, өйткені Ньютонның үшінші заңы негізінде толық жүйе үшін олардың қосындысы нөлге тең). Әрбір нүктеге екпін $\vec{F}_{i\text{ек}} = -m_i \vec{\omega}$ күші әсер етеді. Тепе-теңдік теңдеуін тұрғызамыз:



14.1-сурет

$$X = 0; \quad F - \sum F_{i\text{ек}} = 0,$$

мұнан

$$F = \sum F_{i\text{ек}} = \sum (m_i \omega).$$

Ілгерілемелі қозғалыста дененің барлық нүктелерінің жылдамдықтары ω бірдей болады, сондықтан оны қосынды белгісінің сыртына шығаруға болады, яғни

$$F = \omega \sum (m_i) = m \omega.$$

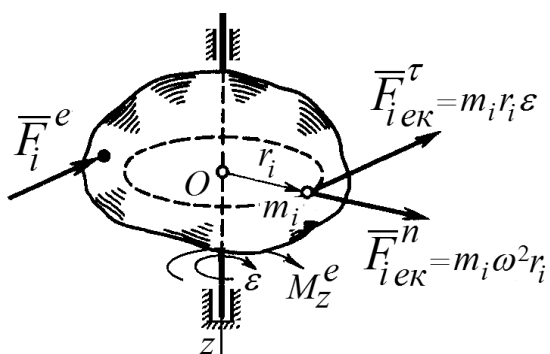
Ньютонаң екінші заңы негізінде \bar{F} күші мен $\bar{\omega}$ жылдамдық векторлары бағыттас болады, сондықтан

$$\bar{F} = m\bar{\omega} . \quad (14.1)$$

Осы теңдеу *қатты дененің ілгерілемелі қозғалысының теңдеуі* болып табылады және оның нүкте динамикасының негізгі теңдеуінен айырмашылығы жоқ, демек, *нүкте динамикасының барлық формулаларын ілгерілемелі қозғалатын денелерге қолдануға болады.*

14.2. Қатты дененің айналмалы қозғалысы үшін динамиканың негізгі теңдеуі

Айналмалы қозғалыстағы денеге түсірілген күш пен оған берілген бұрыштық үдеу ε арасындағы байланысты анықтайық (14.2-сурет).



14.2-сурет

Даламбер принципін пайдаланамыз. Дененің m_i элементар бөлігін, оған екпін күшінің нормаль және жанама құраушыларын түсіріп, қарастырамыз. Осы сияқты, дененің барлық бөлшектеріне екпін күштерін түсіріп, Даламбер принципіне сәйкес, теңгерілген күштер жүйесін аламыз. Осы күштер жүйесіне тепе-теңдік теңдеулерін қолданамыз.

$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ сыртқы күштердің z айналу өсіне қатысты моментін M_z^e деп белгілейміз және айналдырушы момент деп атаймыз.

Нормаль екпін күштері айналу өсін қиып өтеді, сондықтан да оған қарағанда момент туғызбайды, ал жанама екпін күштері айналу өсіне қарағанда момент туғызады. Әрбір нүктенің \bar{F}_i жанама екпін күштерінің иіндері сәйкесінше r_i болады.

Осы күштердің қосынды моменттерінің бағыты ε бұрыштық үдеудің және сәйкесінше айналдырушы M_z^e моментін бағытына қарама-қарсы, өйткені кез келген нүктенің жанама екпін күштерінің бағыты олардың жанама үдеулеріне қарама-қарсы. Айналмалы қозғалыстағы дененің нүктелерінің жанама екпін күштері

$$F_{iek}^{\tau} = m_i r_i \varepsilon_i$$

формуласымен анықталатынын еске түсірейік.

z айналу өсіне қатысты моменттер теңдеуін тұрғызамыз

$$\sum M_{iz} = 0; \quad M_z^e - \sum F_{iek}^{\tau} r_i,$$

мұнан

$$\sum F_{iek}^{\tau} r_i = M_z^e.$$

F_{iek}^{τ} мәнін енгізіп,

$$\sum m_i r_i^2 \varepsilon = M_z^e$$

аламыз.

Дененің барлық нүктелерінің бұрыштық үдеулерінің шамалары бірдей деп қарастырып, осы өрнектегі қосындының сыртына шығарамыз $\varepsilon \sum m_i r_i^2 = M_z^e$.

Бұрыштық үдеудің жанындағы көбейткіш дененің z айналу өсіне қатысты екіпін моментін береді

$$\sum m_i r_i^2 = I_z. \quad (14.2)$$

Демек, *дене массасының екіпін моменті* деп денені құрайтын материялық нүкте массаларының айналу өсіне дейінгі қашықтықтары квадратының көбейтіндісіне тең сандық шамасы аталады және I_z деп белгіленеді.

Олай болса,

$$\varepsilon \cdot I_z = M_z^e. \quad (14.3)$$

Бұл – қатты дененің айналмалы қозғалысы үшін динамиканың негізгі теңдеуі. Ол дененің екіпін моментінің оның бұрыштық үдеуіне көбейтіндісі барлық күштің айналу өсіне қатысты моменттерінің қосындысына тең екенін сипаттайды.

$$(14.3) \text{ өрнектен } \varepsilon = \frac{M_z^e}{I_z}.$$

Демек, денеге белгілі бір ε бұрыштық үдеу беру үшін дененің екпін моменті неғұрлым үлкен болса, соғұрлым үлкен айналдырушы момент түсіру қажет.

Сондықтан материялық нүктенің немесе дененің ілгерілемелі қозғалысының екпіндік өлшемі масса болатыны сияқты, *массаның екпін моментін қатты дененің қозғалмайтын өс төңірегіндегі айналмалы қозғалысының екпіндік өлшемі деп қарастыруға болады.*

14.3. Абсолют қатты дененің қарапайым қозғалыстарының кинетикалық энергиясы

а) Ілгерілемелі қозғалыс. Ілгерілемелі қозғалыстағы абсолют қатты дененің барлық нүктелері бір бағытта бірдей жылдамдықпен қозғалатындықтан, *ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясының шамасы дененің массасы мен кез келген нүктесінің жылдамдығы квадратының көбейтіндісіне тең:*

$$T = \frac{Mv_c^2}{2}. \quad (14.4)$$

мұндағы M – дененің массасы; \bar{v}_c – дененің ауырлық центрінің жылдамдығы.

б) Қозғалмайтын өс төңірегіндегі айналмалы қозғалыс. Айналмалы қозғалыстағы дененің кез келген нүктесінің жылдамдығы келесі формуламен анықталады:

$$v = r\omega,$$

мұндағы r – нүктенің айналу өсінен қашықтығы, айнымалы шама; ω – бұрыштық үдеу (дененің барлық нүктелері үшін тұрақты шама).

Демек, *қозғалмайтын өс төңірегіндегі айналмалы қозғалатын дененің кинетикалық энергиясы оның айналу өсіне қарағандағы дене массасының екпін моментінің бұрыштық үдеудің квадратына көбейтіндісінің жартысына тең.*

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2}. \quad (14.5)$$

с) **Жазық-параллель қозғалыс.** Кинематикада көрсетілгендей, дененің жазық-параллель қозғалысын екі қозғалысқа жіктеуге болады: қандай да бір полюсімен ілгерілемелі және полюс төңірегіндегі айналмалы. Демек, дененің жазық-параллель қозғалыстағы кинетикалық энергиясын ілгерілемелі қозғалыстың кинетикалық энергиясының және полюс төңірегіндегі айналмалы қозғалыстың кинетикалық энергиясының қосындысы түрінде анықтауға болады:

$$T = \frac{Mv^2}{2} + I \frac{\omega^2}{2}, \quad (14.6)$$

мұндағы \bar{v} – полюстің ілгерілемелі қозғалыстағы жылдамдығы.

Кейбір біртекті денелердің екпін моменттерін анықтайтын формулаларды келтіреміз:

1) массасы M , табан радиусы R тұтас цилиндрдің бойлық өсіне қатысты $I = \frac{MR^2}{2}$;

2) массасы M , радиусы R шардың диаметріне қатысты $I = \frac{2MR^2}{5}$;

3) массасы M , радиусы R жұқа сфералық қабыршықтың диаметріне қатысты $I = \frac{2MR^2}{3}$;

4) массасы M , сыртқы радиусы R және тесік радиусы r қуыс біліктің бойлық өсіне қатысты $I = \frac{M(R^2 + r^2)}{2}$;

5) массасы M , ұзындығы l жіңішке стерженьнің бойлық өсінің ортасына түсірілген перпендикуляр өске қатысты $I = \frac{Ml^2}{12}$;

6) массасы M , радиусы R дөңгелектің диаметріне қатысты $I = \frac{MR^2}{2}$;

7) массасы M , табан радиусы R тұтас конустың бойлық өсіне қатысты $I = \frac{3MR^2}{10}$.

14.4. Механикалық энергияның сақталу заңы

Материялық нүктенің берілген M нүктедегі **потенциал энергиясы** деп күштің нүкте орнын ауыстыруда жасалатын жұмысына тең, скалярлық шаманы атаймыз. Мысалы, жебесімен керілген садақта немесе сығылған серіппеде потенциал энергия жинақталады.

Белгілі бір биіктікке көтерілген кез келген материялық нүктенің потенциал энергиясы болады. Бұл жағдайда потенциал энергияның өлшемі болып нүктенің еркін құлағандағы жасайтын жұмысы саналады.

Нүктенің құлау биіктігін h Жердің өлшемдеріне қарағанда аз шама деп болжасақ, онда ауырлық күшті G тұрақты деп есептеп, потенциал энергияның Π өрнегін аламыз:

$$\Pi = Gh. \quad (14.7)$$

мұндағы Π – потенциялық энергия; G – ауырлық күшті; h – теңіз деңгейінен ауырлық центрге дейінгі қашықтық.

Потенциал энергия жұмыс өлшемімен өлшенеді. Энергия санақ жүйесіне қатысты есептеледі, сондықтан белгілі бір биіктікке көтерілген материялық нүктенің потенциал энергиясы – санақ жүйесіне тәуелді салыстырмалы шама.

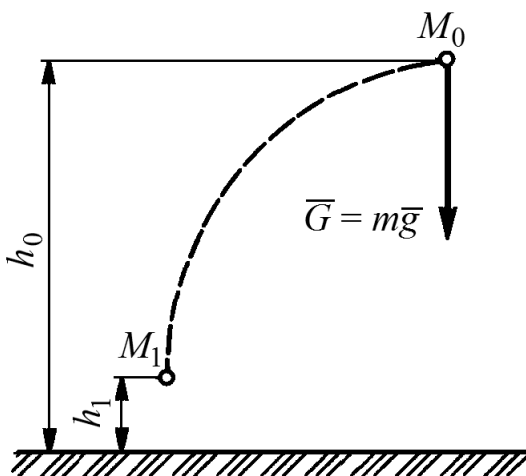
Тек ауырлық күші әсер ететін массасы m материялық нүкте h_0 биіктіктегі M_0 нүктесінде болсын. Нүктенің жылдамдығы M_0 жағдайында v_0 , потенциал энергиясы Π_0 деп алайық. M_1 жағдайында

нүкте h_1 биіктікте болсын және жылдамдығы v_1 , ал потенциал энергиясы Π_1 -ге тең делік.

Материялық нүкте тек ауырлық күші әсерінен құлағанда жұмыс жасалады:

$$A = G(h_0 - h_1) = Gh_0 - Gh_1 = \Pi_0 - \Pi_1.$$

Алдыңғы тақырыпта дәлелденген теоремаға тиісті бұл жұмыс кинетикалық энергияның өзгерісіне тең:



14.3-сурет

$$A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = T_1 - T_0, \text{ немесе } \Pi_0 - \Pi_1 = T_1 - T_0,$$

демек,

$$\Pi_0 + T_0 = \Pi_1 + T_1, \text{ немесе } \Pi + T = \text{const.} \quad (14.8)$$

Бұл теңдік **механикалық энергияның сақталу заңының** математикалық өрнегі болып табылады және ол былайша тұжырымдалады: *материялық нүкте тек ауырлық күші әсерінен қозғалғанда, оның потенциал және кинетикалық энергияларының қосындысы – тұрақты шама.*

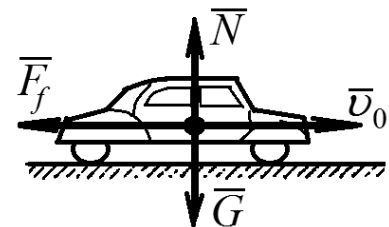
Механикалық энергияның сақталу заңы негізінде, егер дене жер бетінен жоғары лақтырылса, онда оның төменгі орнындағы кинетикалық энергиясы ең жоғарғы орнындағы потенциал энергиясына тең болады.

Осы заң кез келген потенциал күштерінің әсеріндегі қозғалыстар үшін орында, ал егер потенциал емес күштер әсер етсе (мысалы, үйкеліс күші), механикалық энергия энергияның басқа түріне өтеді.

14.5. Есептерді шешудің әдістемесі

14.1-мысал. Автомобиль 54 км/сағ жылдамдақпен қозғалып келе жатты (14.4-сурет). Автомобиль күрт тежеу нәтижесінде тоқтады. Егер жолдың беті мен автомобиль доңғалағының арасындағы үйкеліс коэффициенті $0,36$ болса, автомобиль қанша уақыт аралығында толық тоқтайды?

Шешуі: Автомобиль тек үйкеліс күші әсерінен тоқталады деп қарастырамыз. Қозғалыс мөлшерінің өзгеру теоремасын қолданамыз. Автомобильдің бастапқы жылдамдығы $v_0 = \frac{54 \cdot 1000}{3600} = 15 \text{ м/с}$.



14.4-сурет

Қозғалыс мөлшерінің өзгеру теоремасы бойынша

$$mv - mv_0 = F_{\text{кед}} \cdot$$

Соңғы жылдамдық $v = 0$ (тоқтайды). Кедергі күші $F_{кед} = -fN$.

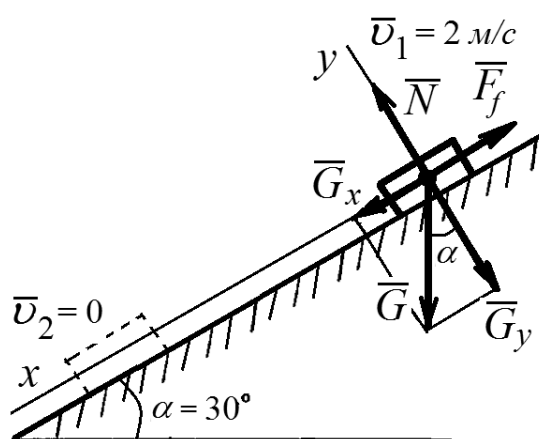
$$N = G = mg,$$

мұндағы N – қысым күші; f – үйкеліс коэффициенті; G – ауырлық күші; m – автомобильдің массасы.

$$mv - mv_0 = -fmg t; \quad v_0 = fgt;$$

$$t = \frac{v_0}{fg} = \frac{15}{0,36 \cdot 9,81} = 4,25 \text{ c}$$

14.2-мысал. Бастапқы жылдамдығы $v_1 = 2 \text{ м/с}$ жәшік көлбеу жазықтықпен қозғала отырып (14.5-сурет), $t = 5 \text{ c}$ өткеннен кейін үйкелістің әсерінен тоқтайды ($v_2 = 0$). Жәшіктің жазық бетіндегі үйкеліс коэффициентін анықтаңыз.



14.5-сурет

Шешуі: Қозғалыс мөлшерінің өзгеруі теңдеуін түземіз

$$mv_2 - mv_1 = S.$$

Жәшіктің массасын оның салмағымен өрнектейміз:

$$m = \frac{G}{g}.$$

x өсімен бағытталған күштің импульсін есептейміз

$$S = (G_x - F_f) \cdot t.$$

Жәшіктің салмағын \bar{G} көлбеу жазықтың бойымен және оның нормалі бағытында жіктеп,

$$G_y = G \cos \alpha; \quad G_x = G \sin \alpha,$$

аламыз.

Барлық күштердің y өсіне проекциясынан құрып,

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N - G_y = 0$$

нормаль реакцияны өрнектейміз

$$N = G_y = G \cos \alpha .$$

Үйкеліс күші нормаль қысым күшіне пропорционалды

$$F_f = fN = fG \cos \alpha .$$

Олай болса, күштің импульсін келесі өрнекпен есептеуге болады:

$$S = (G \sin \alpha - fG \cos \alpha) \cdot t .$$

Импульстің шамасын қозғалыс мөлшерінің өзгеруімен теңестіреміз

$$\frac{G}{g} v_2 - \frac{G}{g} v_1 = (G \sin \alpha - fG \cos \alpha) \cdot t .$$

Бұл теңдікті G -ға қысқартып және $v_2 = 0$ екенін ескерсек,

$$-\frac{1}{g} v_1 = t \sin \alpha - ft \cos \alpha$$

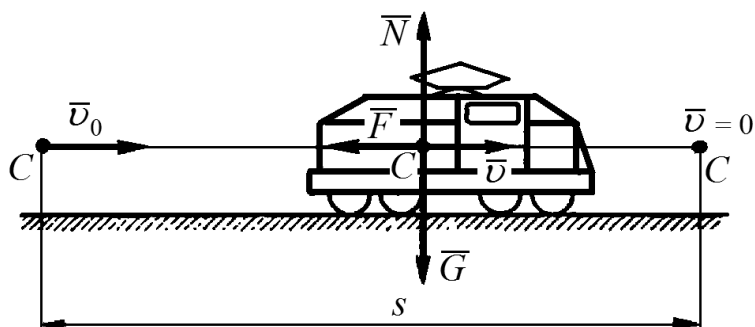
теңдеуін аламыз.

Осы теңдеуді белгісіз үйкеліс коэффициентіне қатысты шешеміз:

$$f = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{v_1}{gt \cos \alpha} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} + \frac{2}{9,81 \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ} = 0,62 .$$

14.3-мысал. Электровоздың жылдамдығы 90 км/сағ мезетінде электровоз машинисі қозғалтқышты сөндіріп, тежегіш құрылғыны қосады (14.6-сурет). Егер тежегіш күш тұрақты және оның салмағының $0,12$ бөлігін құраса, ал қозғалысы жолдың горизонталь

және түзусызықты бөлігінде болса, электровоз қандай уақытта және қанша жол жүріп тоқтайды?



14.6-сурет

Шешуі: Электровоз ілгерілемелі қозғалады, сондықтан оның ауырлық центрінің C қозғалысын қарастырамыз. Ауырлық центріне барлық сыртқы күштер түсірілген деп қарастырылады.

Қозғалтқышты сөндіріп, тежегіш құрылғыны қосқаннан кейін электровозға үш күш әсер етеді: \bar{G} – ауырлық күші, \bar{N} – рельстің нормаль реакциясы және \bar{F} – кедергі күші. Қозғалысты тежеудің басында электровоздың жылдамдығы $v_0 = \frac{90 \cdot 1000}{3600} = 25 \text{ м/с}$, ал соңында $v = 0$.

Электровоз қанша жол s жүріп тоқтайтынын және осы жолды қандай уақытта жүретінін анықтау қажет.

Тежеу уақытын анықтау үшін қозғалыс мөлшерінің өзгеру теоремасын қолданамыз.

Векторларды горизонталь өске проекциялаймыз:

$$-Ft = -mv_0.$$

Осы теңдеуді t бойынша шешеміз:

$$t = \frac{mv_0}{F}.$$

Тежеу күші $F = 0,12G = 0,12mg$ болғандықтан, онда ақырында:

$$t = \frac{v_0}{0,12g} = 0,12 \cdot \frac{25}{9,81} = 21,2 \text{ с}.$$

Тежеу жолын s анықтауға кинетикалық энергияның өзгеру теоремасын қолданамыз:

$$-\frac{m\nu_0^2}{2} = -Fs,$$

мұнан

$$s = \frac{m\nu_0^2}{2F} = \frac{\nu_0^2}{2 \cdot 0,12g} = \frac{25^2}{2 \cdot 0,12 \cdot 9,81} = 265 \text{ м.}$$

Сонымен, электровоз 21,2 с аралығында 265 м жол жүріп тоқтайды.

14.4-мысал. Қатты дене горизонтпен $\alpha = 30^\circ$ бұрышын жасайтын көлбеу жазықтықта тыныштық қалпынан ($\nu_0 = 0$) қозғалысқа келеді (14.7-сурет). Сырғанау үйкелісінің коэффициенті $f = 0,1$. Осы дененің бастапқы орнынан $l = 2 \text{ м}$ қашықтыққа орын ауыстырған кезіндегі жылдамдығын анықтаңыз.

Шешуі: Кинетикалық энергияның өзгеруі туралы теореманы қолданатын болсақ,

$$\frac{m\nu_1^2}{2} - \frac{m\nu_0^2}{2} = A,$$

мұндағы $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = \nu$.

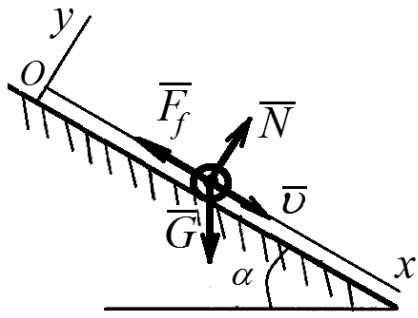
Демек,

$$\frac{m\nu^2}{2} = mgl(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

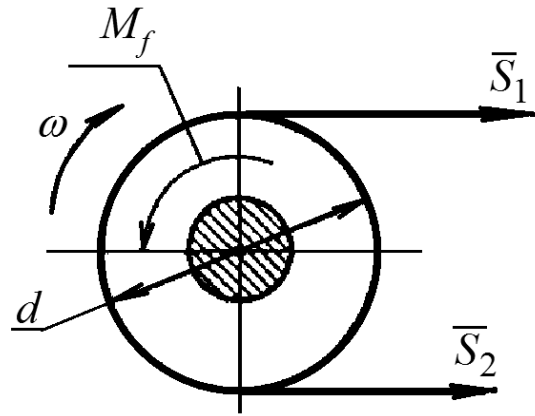
Бұдан нүктенің жылдамдығын анықтаймыз:

$$\nu = \sqrt{2gl(\sin \alpha - f \cos \alpha)} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 2(\sin 30^\circ - 0,15 \cos 30^\circ)} = 4,02 \text{ м/с.}$$

14.6-мысал. Шкив таспалы беріліс арқылы айналмалы қозғалысқа келтіріледі (14.8-сурет). Таспаның жетекші тарамының тарту күші $S_1 = 120 \text{ Н}$, жетектегі тарамының – $S_2 = 50 \text{ Н}$. Шкивтің массасы $m = 200 \text{ кг}$, диаметрі $d = 80 \text{ мм}$, подшипниктердегі кедергі моменті $M_f = 1,2 \text{ Нм}$. Біліктің массасын елемей, шкивтің бұрыштық үдеуін анықтаңыз.



14.7-сурет



14.8-сурет

Шешуі: Айналмалы қозғалыс динамикасының негізгі теңдеуін қолданамыз $M = I \cdot \varepsilon$.

Сыртқы күштердің моменттерінің қосындысын анықтаймыз:

$$M = S_1 \frac{d}{2} - S_2 \frac{d}{2} - M_f;$$

$$M = 120 \cdot \frac{0,08}{2} - 50 \cdot \frac{0,08}{2} - 1,2 = 1,6 \text{ Нм}.$$

Біліктің әсерін елемей, шкивтің екпін моментін есептейміз:

$$I = mr^2; \quad I = 200 \cdot \left(\frac{0,08}{2}\right)^2 = 0,128 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

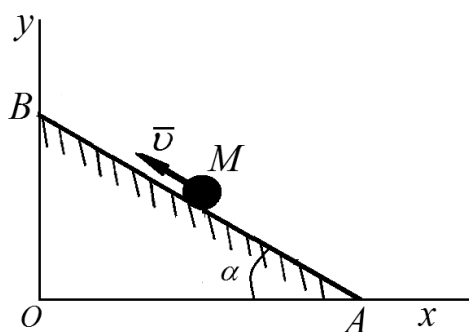
$$\text{Шкивтің бұрыштық үдеуі } \varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{1,6}{0,128} = 12,5 \text{ рад/с}^2.$$

Жаттығу есептері

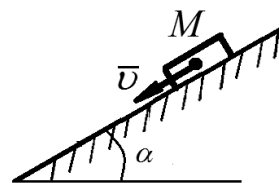
1-есеп. Автомобиль орнынан қозғалып, 10 с кейін жылдамдығын 36 км/сағ дейін өсірді. Қозғалтқыштың \bar{F} тарту күшін анықтаңыз. Автомобильдің массасы – 1500 кг. Автомобильдің төрт доңғалағы – жетектеуші.

2-есеп. Массасы $m = 0,5 \text{ кг}$ материялық нүкте Oy өсінің бойымен $y = 5t^2$ заңдылығына сәйкес қозғалады. Осы нүктенің $t = 2 \text{ с}$ болған сәттегі қозғалыс мөлшерінің O центріне қатысты моментінің анықтаңыз.

3-есеп. Массасы $m = 0,5 \text{ кг}$ материялық нүкте AB түзуінің бойымен $v = 2 \text{ м/с}$ жылдамдықпен қозғалады (1-сурет). Арақашықтық $OA = 1 \text{ м}$, бұрыш $\alpha = 30^\circ$. Нүктенің қозғалыс мөлшерінің координаты бас нүктесіне қатысты моментін анықтаңыз.



1-сурет



2-сурет

4-есеп. Көлбеу жазықтықпен массасы $m = 4 \text{ кг}$ жүк бастапқы жылдамдықсыз төмен түсіп келеді (2-сурет). Жазықтық пен жүк арасындағы сырғанаудың үйкеліс коэффициенті $f = 0,2$ деп алып, жүк қозғала бастағаннан кейін 4 м жол жүрген сәттегі кинетикалық энергиясын анықтаңыз.

Қайталау сұрақтары:

1. Қозғалыс мөлшері дегеніміз не?
2. Күштің элементар импульсі дегенді қалай түсінесіз?
3. Тұрақты күш импульсі дегеніміз не?
4. Элементар жұмыс қалай анықталады?
5. Күш жұмысын есептеу өрнектері қандай?
6. Күш қуаты туралы баяндаңыз.
7. Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің моменті дегеніміз не?
8. Нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема қалай тұжырымдалады? Сақталу заңдары.
9. Материялық нүктенің кинетикалық энергиясы дегеніміз не?

10. Материялық нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема қалай өрнектеледі? Сақталу заңдары.
11. Абсолюттік қатты дененің қарапайым қозғалыстарының кинетикалық энергиясын есептеу өрнектері туралы не білесіз?
12. Қатты дененің айналмалы қозғалысы үшін динамиканың негізгі теңдеуі. Оның мағынасы неде?

15-тарау. НЕГІЗГІ ҚАҒИДАЛАР

15.1. Бастапқы ұғымдар

Материалдар кедергісі ілімі Қайта өрлеу заманында техниканың, сауда-саттықтың, теңізде жүзудің, әскери істің дамуы кезеңінде ірі теңіз кемелерін, гидротехникалық имараттарды және басқа да күрделі конструкцияларды құруға қажетті ғылыми негіздеме беру қажеттілігінен туындады. Осы ілімнің негізін қалаушы деп италиян ғалымы Г.Галилей (1564-1642) есептеледі.

Іс жүзінде, конструкциялардың барлық элементтері сыртқы күш әсерінен *деформацияланады*, яғни олар пішіндерін және өлшемдерін өзгертеді, ал кейбір жағдайларда конструкцияның қирауына әкелуі мүмкін. Денелердің өлшемдері мен пішіндерінің өзгеруін *деформация* деп атайды. Ол материалдың атомдарының арақашықтықтарының өзгеруі мен атом блоктарының орын ауыстыруы салдарынан туындайды.

Материалдар кедергісі – машиналар мен имараттар материалдарының және элементтерінің беріктігі және деформациялануы туралы ілім.

Беріктік деп конструкция материалының және оның элементтерінің сыртқы күш әсеріне қирамай қарсыласу қабілетін айтады.

Материалдар кедергісінде конструкция элементтерін *беріктікке, қатаңдыққа* және *орнықтылыққа* есептеудің әдістері қарастырылады.

Беріктікке есептеу машина мен имараттардың әрбір элементтерінің берілген күшке төтеп бере алатын пішіні мен өлшемдерін анықтауға мүмкіндік береді.

Қатаңдық деп конструкция мен оның элементтерінің деформацияға қарсыласу қабілетін атайды.

Қатаңдыққа есептеу конструкция мен оның элементтерінің пішіндері мен өлшемдерінің өзгеруі мүмкіндік мөлшерден аспауына кепілдік береді.

Орнықтылық деп конструкцияның немесе оның элементтерінің белгілі алғашқы серпімді тепе-теңдік күйін сақтау қабілетін айтады.

Орнықтылыққа есептеу ұзын немесе жұқа тетіктердің төтеннен майысуы және орнықтылығын жоғалтуы мүмкіндігін қақпайлайды.

Материалдар кедергісі – экспериментті-теориялық ғылым және осы циклдегі басқа пәндерден айырмашылығы – ол ықшамдалған жорамалдар мен қарапайым математикалық аппараттарды қолданады. Материалдар кедергісі әдістерімен алынған есептердің шешімдері, әдетте, іс жүзінде қолдануға ыңғайлы, қарапайым формула түрінде өрнектеледі. Сонымен қатар олардың нәтижелерінің жуық шама және қолдану аймағының шектеулі болатынын естен шығармау керек.

Нақты объектілер көптеген жағдайда күрделі пішінді болып келеді, ал бірақ та оларды жекеленген элементтерден, мысалы, **білеуден, пластинадан, қабыршықтан** және **массивтен** құрылған деп қарастыруға болады.

Материалдар кедергісіндегі негізгі есептеу элементі **білеу** болып табылады, яғни *көлденең қимасының өлшемдері ұзындығынан едәуір кіші дене*. Білеулер *түзусызықты, қисықсызықты, тұрақты* және *айнымалы* қималы болады. Олар конструкцияларда қолданылуына байланысты *бағана, арқалық, стержень* деп аталады.

Білеудің көлденең қималарының ауырлық центрлерін қосатын сызықты *білеу өсі* деп атаймыз. Білеу өсіне перпендикуляр жазық қиманы *көлденең*; білеу (түзусызықты) өсіне параллель – *көлденең*; басқа жазық қималар – *көлбеу қима* деп аталады.

Пластина және **қабықша** – қалыңдығы басқа өлшемдеріне қарағанда өте кіші дене, мысалы, резервуар, құбыр, кемелер мен ұшақтардың қаптамасы.

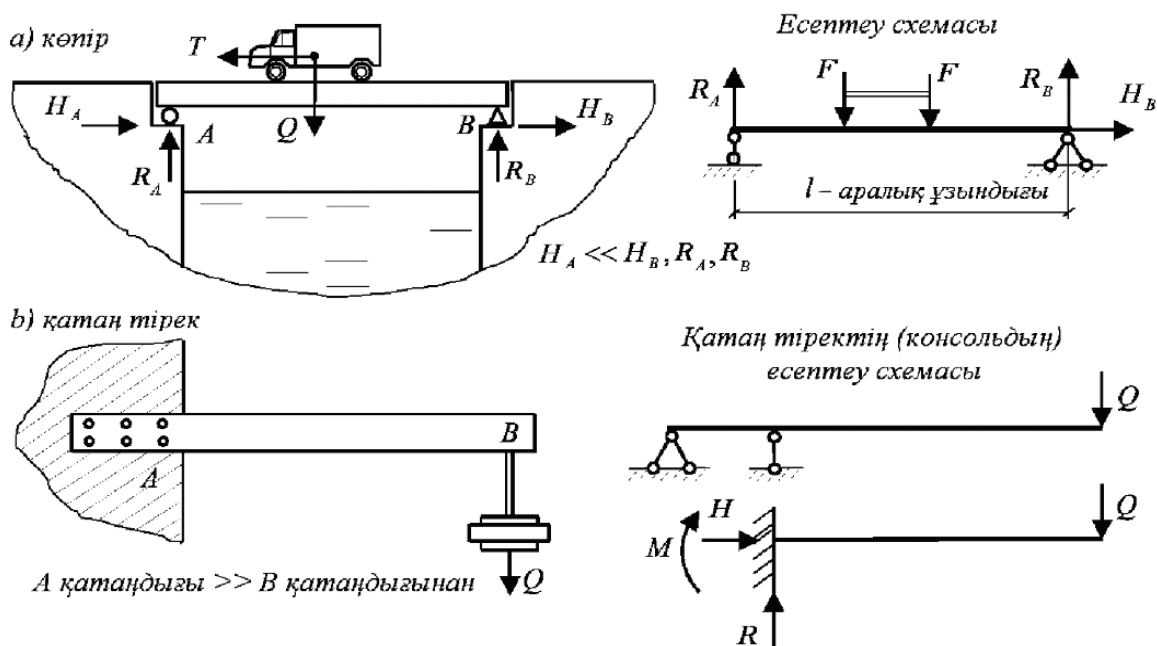
Үш өлшемі өзара шамалас дене **массив**, мысалы, имараттардың іргетастары, плотиналар.

Материалдар кедергісі пәнінде қатандығы жеткілікті, аз деформацияланатын, көбінесе көлденең қималары тұрақты, стержень тәріздес жұмыр денелер немесе олардан құрылған қарапайым жүйелер қарастырылады.

Конструкция элементтері кеңістікте белгілі орында және бір-бірінен белгілі бір қашықтықта орналасуға тиіс. Ол үшін олардың орны серпімді немесе қатаң байланыстармен бекітілуге тиіс. Серпімді байланыстар бекітілген элементтердің деформацияларымен өлшемдес

деформациялана алады. Қатаң байланыстың деформациялары елеусіз болғандықтан ескерілмейді

Байланыстардың түсу нүктелерін **тірек нүктелері** немесе **тірек** деп атайды. Бір тірек нүктесінде бірнеше байланыс түсірілуі мүмкін. 15.1, *a*-суретте топсалы жылжымайтын және топсалы жылжымалы тіректер, ал 15.1, *b*-суретте қатаң бекітілген тірек көрсетілген.



15.1-сурет

Топсалы жылжымалы тіректің – бір, топсалы жылжымайтын – екі, ал қатаң бекітілген үш байланысы бар. Тірекке түсірілген әрбір байланысына, байланыс әсерлерінің бағытында бағытталған тірек реакциялары сәйкес келеді.

15.1-суретте есептеу схемасын таңдаудың және тіректердің негізгі түрлері келтірілген.

Сыртқы күш әсері жойылғанда, денедегі деформация да жойылса, ондай деформацияны **серпімді деформация** деп атайды, ал дененің күш әсері жойылғаннан кейін өзінің алғашқы қалпына келу қасиеті **серпімділік** деп аталады.

Қалдық немесе **пластикалық деформация** деп денеде сыртқы күш әсері жойылғаннан кейін де сақталып қалатын деформацияны айтады, ал материалдың қалдық деформация беретін қасиетін **пластикалық** деп атайды.

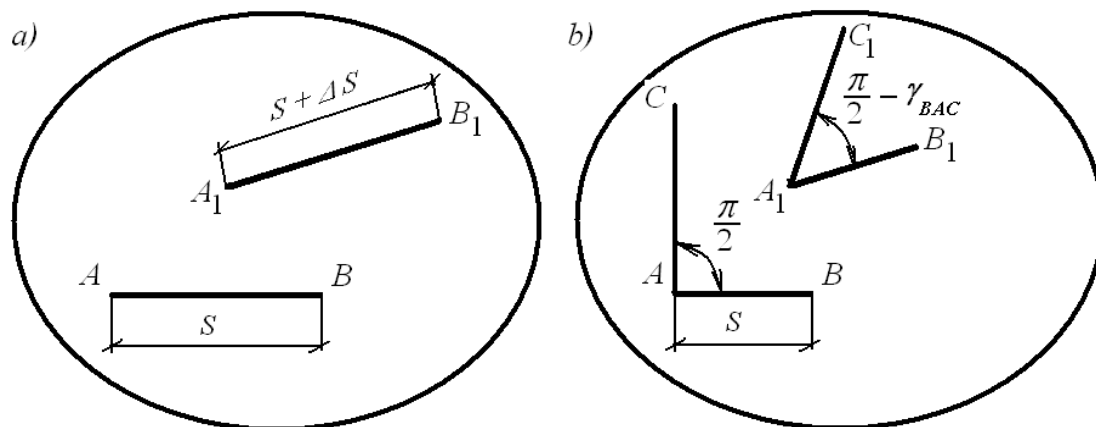
Дененің сызықты өлшемдерінің өзгеруін **сызықтық деформация**, ал бұрыштық өлшемдерінің өзгеруін **бұрыштық деформация** деп айтады.

Кез келген A нүктесіндегі деформацияны анықтау үшін деформацияланбаған денеге осы A нүктесінен шығатын, кез келген бағыттағы және ұзындығы s түзу AB кесіндісін түсірейік. Дене деформациялағаннан кейін A және B нүктелері орын ауыстырып, тиісінше A_1 және B_1 орындарына орналасады, ал нүктелердің арасының s ұзындығы Δs шамасына өзгереді (15.2, а-сурет).

$\frac{\Delta s}{s} = \varepsilon_{opt}$ қатынасы AB кесіндісінің **орташа салыстырмалы сызықтық деформациясы** деп аталады. B нүктесін A нүктесіне жақындатып, яғни кесіндінің s ұзындығын азайта, шегінде

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s} = \varepsilon_{AB}$$

аламыз.



15.2-сурет

ε_{AB} шамасы A нүктесінің AB бағытындағы салыстырмалы сызықтық деформациясын білдіреді. Егер A және B нүктелерінің арасы ұлғаятыны белгілі болса, онда ε_{AB} – салыстырмалы ұзару деп, ал осы аралықтың кемуі салыстырмалы қысқару деп аталады.

Бір A нүктесінің өзінде әртүрлі бағыттағы салыстырмалы сызықтық деформациялары әртүрлі болады. Әдетте, негізгі бағыт ретінде таңдалып алынған тікбұрышты координаттар жүйесінің

өстеріне параллель бағытты алады. Онда нүктедегі салыстырмалы сызықтық деформацияларын тиісінше $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ деп белгілейді.

Нүктедегі деформацияны толығымен сипаттау үшін бұрыштық деформация енгізіледі. Егер деформацияға дейін A нүктесінен ұзындықтары s бірдей, өзара перпендикуляр AB және AC кесінділерін түсірсек, деформациядан кейін нүктелердің орын ауыстыруы нәтижесінде кесінділер A_1B_1 және A_1C_1 орнына ауысады, ал олардың арасындағы тікбұрыш $\angle BAC - \angle B_1A_1C_1$ шамасына өзгереді (15.2, b -сурет).

Егер B және C нүктелерін A нүктесіне жақындатсақ, онда шегінде тікбұрыштың қандай шамаға өзгергенін анықтаймыз:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (\angle BAC - \angle B_1A_1C_1) = \gamma_{BAC}.$$

Бұл радианмен өрнектелген, тікбұрыштың өзгеруі AB және AC кесінділері жатқан жазықтықтағы A нүктесіндегі **салыстырмалы бұрыштық деформация** деп аталады. Сол A нүктесіндегі әртүрлі жазықтықтағы салыстырмалы бұрыштық деформациялар әртүрлі болады. Әдетте, салыстырмалы бұрыштық деформацияларды үш өзара перпендикуляр координаттық жазықтықтарда анықтайды. Онда оларды тиісінше $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ деп белгілейді.

Дененің нүктедегі деформациялық күйі толығымен деформацияның алты компонентімен – үш $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ салыстырмалы сызықтық деформациялармен және үш $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ салыстырмалы бұрыштық деформациялармен анықталады.

15.2. Материалдар кедергісі ғылымының негізгі жорамалдары

Материалдар кедергісінде конструкция элементтерін есептеу күрделі болғандықтан, оны іс жүзінде оңай және ыңғайлы түрде шешу үшін материалдардың құрылымы, қасиеттері туралы, деформациялар мен күштер және т. б. деректер туралы бірнеше жорамалдар қолданылады.

Бұл жорамалдар ескеріліп алынған есептеу нәтижелерінің дұрыс екені, оларды инженерлік тәжірибеде кеңінен қолдануға болатыны іс

жүзінде дәлелденген. Төменде материалдар кедергісі курсында кездесетін негізгі жорамалдар келтірілген:

1. **Материалдың тұтастығы туралы жорамал.** Материал дене пішімін толық толтырады, яғни дене үздіксіз тұтас орта деп қарастырылып, оның дискреттік (атомдық) құрылымы ескерілмейді.

2. **Материалдың біртектілігі және изотроптылығы туралы жорамал.** Материалдардың кез келген көлемдегі және кез келген бағыттағы механикалық қасиеттері бірдей.

Машина өндірісінде қолданылатын конструкциялық материалдардың көпшілігі біртекті. Ал құрылыста қолданылатын ағаш, бетон және композитті пластмассалар сияқты т.б. материалдар біртекті емес.

Эртүрлі бағыттағы механикалық қасиеттері бірдей емес материалдарды **анизотропты материалдар** деп атайды.

Материалдарды изотропты деп болжау кейбір жағдайларда қолданылмайды. Мысалы, анизотропты материалдарға ағаш жатады, өйткені оның талшық бойы бағытындағы және талшыққа кесекөлденең бағыттағы қасиеттері эртүрлі, арматураланған материалдар және т.б.

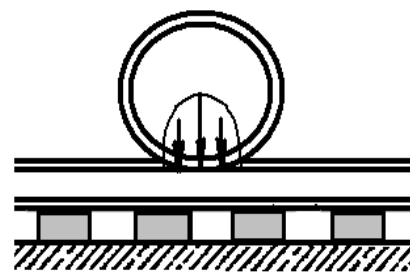
3. **Деформациялардың кішкентайлығы туралы жорамал.** Деформацияланатын дененің өлшемдеріне қарағанда, деформация – өте кішкентай аз шама.

4. **Материалдардың толық серпімділігі туралы жорамал.** Барлық денелер абсолют серпімді деп болжанады. Шын мәнінде, бар денелерді шартты түрде жүктеменің қандай да бір шамасына дейін серпімді деп айтуға болады және осы жәйтті материалдар кедергісінің есептеу формулаларын пайдаланғанда ескерген жөн.

5. **Деформация мен жүктеменің сызықтық тәуелділігі туралы жорамал.** Көптеген материалдардың деформациялануы кезінде деформация мен жүктеменің тура пропорционалдығы жөніндегі Гук заңының ақиқаттығы туралы болжам.

6. **Күш әрекеттерінің тәуелсіздік принципі.** Бұл принцип бойынша денедегі топ күштер әсерлерінің нәтижесі сол топтағы жеке күштердің әсерлері нәтижелерінің қосындысына тең. Яғни күш тобының әсерінен жүйеде пайда болған деформация сол топтағы жеке күштердің әсерлерінен пайда болған деформациялардың қосындысына тең.

7. *Сен-Венан принципі.* Бұл принцип бойынша конструкция элементінің сыртқы күш түсірілген жерінен жеткілікті қашықтықта жатқан қималардағы нүктелерде пайда болатын кернеулер мен деформациялар сыртқы күштің түсіру әдісіне байланысты емес.



15.3-сурет

Осы принципке арқа сүйеп, көптеген жағдайда бір күш жүйесін оған статикалық эквивалентті басқа күш жүйесімен алмастыруға болады, нәтижесінде есепті шешу жеңілдейді. Мысалы, көп тіректі теміржол рельсінің есептеу схемасын құрғанда, дөңгелектен рельске кішігірім аудан арқылы берілетін бірқалыпсыз таралған күшті нүкте арқылы берілетін қадалған күшпен ауыстыруға болады (15.3-сурет).

15.3. Сыртқы күштер және олардың жіктелуі

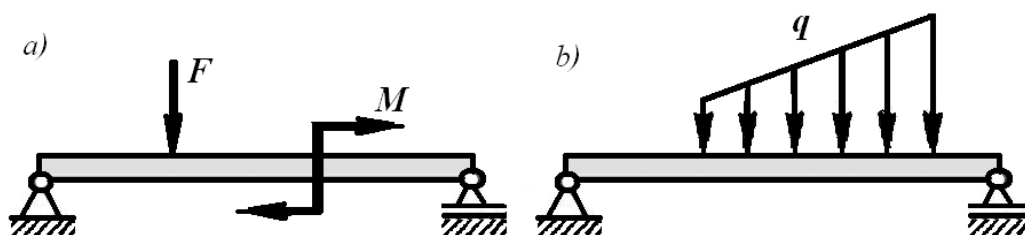
Материалдар кедергісі есептерін шешкенде, ең алдымен конструкция элементтеріне әсер ететін сыртқы күштің шамасы мен түсу сипатын анықтап алу қажет. Белгілідей, *сыртқы күш* деп денелердің бір-бірімен әсерін, демек, сол конструкция элементтерінің өзара әсерін айтады. Сол сияқты берілген конструкция элементінің басқа денемен әсері қарастырылған элемент үшін сыртқы күш болып табылады. Мысалы, шамға құйылған жермайдың салмағы шам орнатылған тұғырға түседі, одан тұғырдың аяқтары арқылы іргетасқа түседі. Элементтің өз салмағы да сыртқы күшке жатады.

Сыртқы күштер *көлемдік* және *беттік* болып бөлінеді. Беті арқылы берілетін сыртқы күш *беттік*, ал көлемі арқылы берілетін сыртқы күш *көлемдік күш* деп аталады.

Беттік күштер *қадалған* немесе *таралған* күш болуы мүмкін.

Қадалған күштер деп конструкция элементтеріне өз өлшемдерімен салыстырғанда өте шағын аудан арқылы берілетін *күштерді* және *моменттерді* айтады (15.4, *а*-сурет). Мысалы, тісті берілістегі тістердің бір-біріне әсері. Ауданның өте шағындығына байланысты қадалған күш әдетте денеге нүкте арқылы беріледі деп есептелінеді. Қадалған күштің өлшем бірлігі – ньютон (H), килоньютон (kH),

меганьютон (MH). Моменттің өлшем бірлігі – ньютон (Hm), килоньютон ($кHm$), меганьютон (MHm).



15.4-сурет

Таралған күш деп не элементтің барлық көлеміне (*көлемдік күш*), не белгілі бір ауданға (*жазықтық күш*), не белгілі бір ұзындыққа (*сызықтық немесе бойлық жүк*) үздіксіз түсірілген күшті айтады (15.4, *b*-сурет). Ол қарқындылығымен сипатталады. **Қарқындылық** деп күштің бірлік көлемге немесе бірлік ауданға немесе бірлік ұзындыққа түсірілген шамасын айтады. Қарқындылық латынша q әрпімен белгіленеді, сәйкесінше таралған күштердің өлшем бірлігі: көлемдік күш – H/m^3 , $кH/m^3$, MH/m^3 ; жазықтық күш – H/m^2 ; $кH/m^2$, MH/m^2 ; сызықтық немесе бойлық күш – H/m ; $кH/m$, MH/m .

Бұл күштер таралу заңдылықтарына байланысты біркелкі таралған тұрақты және бірқалыпсыз таралған айнымалы күштер деп жіктеледі. Біркелкі таралған тұрақты күштің кез келген нүктедегі қарқындылығы өзара тең, ал бірқалыпсыз таралған айнымалы күштің қарқындылығы әртүрлі.

Денеге тұтас көлемі арқылы берілетін күштер қатаң түрде үздіксіз біркелкі тараған деп қарастырылады.

Көлемдік күшке мысал ретінде дененің салмағын, жазықтық күшке – будың қазан қабырғасына қысымын, сызықтық күшке – ені ұзындығынан өте аз арқалыққа ұзына бойлы түсірілген күшті келтіруге болады.

Сыртқы күш әсер ететін уақытына байланысты да екі топқа бөлінеді: **тұрақты күш** және **уақытша күш**.

Тұрақты күш деп мөлшері мен бағыты өзгермейтін күшті айтады. Егер денеге түскен күштердің шамасы немесе бағыты уақытқа байланысты өзгеріп отырса, ондай күштерді **айнымалы күштер** деп атайды.

Сыртқы күштерді *статикалық* және *динамикалық* күштер деп те топтастыруға болады.

Статикалық күш деп өзінің шамасын немесе түсу нүктесін баяу жылдамдықпен өзгертетін, осы жағдайда туындауы мүмкін үдеуді ескермеуге болатын күшті атайды. Мұндай күш әсерінен конструкцияның және оның элементтерінің тербелісі мардымсыз аз болады.

Динамикалық күш деп уақытқа байланысты үлкен жылдамдықпен өзгертетін күшті айтады. Мұндай күштің әсерінен конструкция немесе оның элементтері елеулі тербелістерге ұшырайды. Тербеліс жылдамдығының өзгеруіне байланысты конструкцияда пайда болатын, оның массасы мен үдеуінің көбейтіндісіне тура пропорционал екпін күші шамасы жағынан конструкцияда тербеліс тудырушы сыртқы күштің шамасынан бірнеше есе үлкен болуы мүмкін.

Динамикалық күштер *соққы*, *айнымалы-қайталанбалы* және т.б. түрлерге жіктеледі.

Соққы күш деп кинетикалық энергиясы бар қозғалыстағы дененің екінші бір денеге соқтығысуы арқылы берілетін күшті айтады.

Айнымалы-қайталанбалы күштер деп машина бөлшектеріне уақытқа тәуелді, периодты түрде қайталанып түсетін күштерді атайды. Мысалы, қозғалыстағы машинаның шатун, білік сияқты бөліктеріне немесе теміржол вагонының өсіне түсетін күштер айнымалы-қайталанбалы күштерге жатады.

Жалпы жағдайда күш уақытқа тәуелді күрделі заңдылықпен өзгеруі мүмкін.

Конструкцияларға есептеу жүргізгенде, сыртқы күш ретінде тек актив күштер емес, сонымен қатар байланыс реакциялары мен екпін күштері де қабылданады.

Енді негізгі деформацияларды қарастырайық. Іс жүзінде белгілідей, конструкция элементтері тұтыну барысында келесі негізгі деформацияларға ұшырайды:

1) *созылу* – мұндай деформацияға, мысалы, арқан, шынжыр, белдік ұшырайды;

2) *сығылу* – сығуға, мысалы, бағаналар, кірпіш қалауы, ғимараттар мен имараттардың іргетастары жұмыс жасайды;

3) *ығысу* – ығысу деформациясына, мысалы, тойтармалар, бұрандалар, кілтектер, пісірілген қосылыстардың жіктері ұшырайды. Материалдың қирауына жеткізетін ығысу деформациясын *кесілу* деп атайды;

4) *бұралу* – айналмалы қозғалыста қуатты беруші біліктер бұралуға жұмыс жасайды. Әдетте, бұралу деформациясымен басқа деформациялар еріп жүруі мүмкін, мысалы, иілу;

5) *иілу* – иілуге арқалықтар, өстер, тісті доңғалақтардың тістері және т.б. конструкция элементтері жұмыс істейді.

Конструкция элементтері, өте жиі, бір мезетте бірнеше негізгі деформация туындайтын жүктемелер әсеріне ұшырайды.

15.4. Қию әдісі. Кернеу

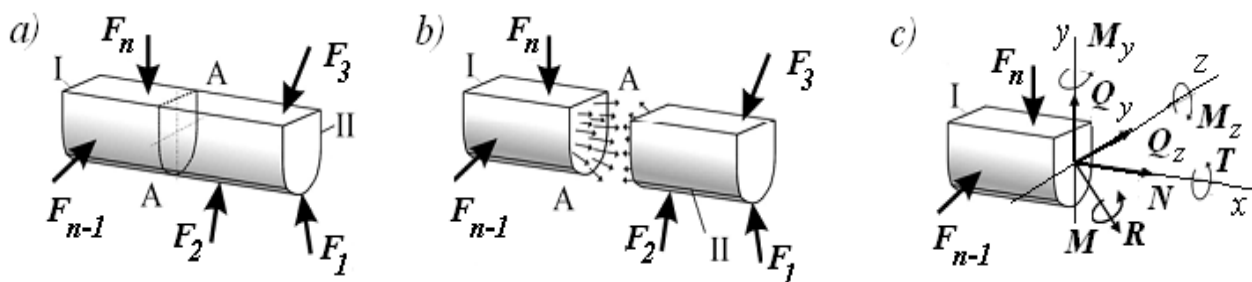
Жоғарыда айтылғандай, сыртқы күш әсерінен денелер деформацияланады. Денелердің атомнан тұратыны, ал атомдар өзара атомдық күшпен байланысып, тепе-теңдік күйде болатыны физика курсынан мәлім. Дене деформацияланған кезде атомдардың арақашықтығы өзгереді. Осының салдарынан атомдық күш қандай да бір қосымша әсерлесу күшіне – серпімді күшке өзгереді. Қосымша күш атомдарды алғашқы күйіне келтіруге тырысады. Бұл атомдардың қосымша өзара әсерлесу күші материалдар кедергісі ғылымында *ішкі күш* деп аталады. Ол конструкция элементтерінің сыртқы күш әсеріне қарсыласу қабілетін көрсетеді. Сонымен, ішкі күштің өзгеру мөлшері сыртқы күштің өзгеру мөлшерімен тең болғанда ғана, конструкция элементтері жұмыс істеу қабілеті мен тепе-теңдік күйін сақтай алады.

Сыртқы күштердің ұлғаюымен ішкі күштердің де өсетіні, әрине, айқын. Бірақ ішкі күштердің шексіз ұлғаюы мүмкін емес, қандай да бір мезетте белгісіз бір нүктенің төңірегінде сыртқы күштерді теңестіре алмауы мүмкін. Бұл күштердің өзара теңсіздігі конструкцияның қирап сынуына немесе орнықтылығын жоғалтуына әкеліп соқтыратыны мәлім. Сондықтан да ішкі күштің шамасын білмей, машиналар мен конструкциялардың беріктігін бағалау мүмкін емес.

Ішкі күштерді табу үшін *қию әдісі* қолданылады. Бұл әдіс «Дене тепе-теңдік күйде тұрса, онда оның кез келген бөлігі де тепе-теңдік

күйде болады» деген механика заңдылығына негізделген. Қию әдісінің маңызы мынада. Стержень пішінді қандай да бір денені қарастырайық. Оған теңестірілген жүйені құратын сыртқы F_1, F_2, \dots, F_n күштері әсер етсін делік (15.5, *a*-сурет).

Бізді қызықтыратын білеудің $A - A$ қимасын қарастырайық. Ол үшін дене осы қимада $A - A$ жазықтығымен қиылып, сол бөлігі (*II*) алынып тасталған деп елестетейік (15.5, *b*-сурет). Егер бүтін дене сыртқы күш әсерінен тепе-теңдікте болса, онда оның әрбір бөлігі де тепе-теңдікте болады. Бұл жағдайда әрбір бөлікке өздеріне түсірілген сыртқы күштермен қатар $A - A$ қимасындағы материал бөлшектерінің өзара әсерінің ішкі күштері де әсер етеді деп қарастыру қажет (15.5, *b*-сурет). Осы ішкі күштер қарастырылып отырған *I* бөлікке алып тасталған *II* бөліктің әсерін көрсетеді. Қимадағы ішкі күштер үздіксіз жайылып, таралып беріледі. Жалпы жағдайда олардың әсер ету бағыттары мен шамалары белгісіз, бірақ кез келген сыртқы күштер жүйесі сияқты ішкі күштер жүйесін де бір нүктеге, атап айтқанда, қиманың ауырлық центріне келтіруге болады. Нәтижесінде *R бас вектор* мен *M бас момент* алынады (15.5, *c*-сурет).



15.5-сурет

Бас нүктесі ауырлық центрде жататын координат жүйесін тұрғызып, бас вектор мен бас моментті өстерге жіктеп, үш күш пен үш моменттен тұратын құраушыларын аламыз. Бұл құраушы күштер мен моменттер білеудің қимасындағы **ішкі күш факторлары** немесе **ішкі күш компоненттері** деп аталады (15.5, *c*-сурет). Олардың әрқайсысының өз аттары бар: *N* көлденең қимаға перпендикуляр бойлық өс бойымен әсер етеді, сондықтан ол – **бойлық күш**; O_y және O_z өстеріне параллель әсер ететін Q_y, Q_z ішкі күштері – **көлденең** немесе **жанама күштер**; O_z және O_y өстеріне қатысты M_z, M_y

моменттері – *ию моменттері*; бойлық өке қатысты T моменті – *бұрау моменті*.

Дененің оң (I) немесе сол (II) бөліктеріне түсірілген ішкі және сыртқы күштері өзара тепе-теңдік күйде болады. Сондықтан ішкі күштерді дененің кез келген бөлігі үшін құрылған тепе-теңдік теңдеулерінен анықтауға болады.

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= N + \sum_I F_x^e = 0; & \sum M_x &= M_k + \sum_I M_x(F^e) = 0; \\ \sum F_y &= Q_y + \sum_I F_y^e = 0; & \sum M_y &= M_y + \sum_I M_y(F^e) = 0; \\ \sum F_z &= Q_z + \sum_I F_z^e = 0; & \sum M_z &= M_z + \sum_I M_z(F^e) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

мұндағы

$\sum_I F_x^e$, $\sum_I F_y^e$, $\sum_I F_z^e$ – стерженьнің қарастырылып отырған бөлігіне әсер ететін сыртқы күштердің, сәйкесінше x , y , z өстеріне проекцияларының алгебралық қосындылары;

$\sum_I M_x(F^e)$, $\sum_I M_y(F^e)$, $\sum_I M_z(F^e)$ – стерженьнің қарастырылып отырған бөлігіне әсер ететін сыртқы күштердің, сәйкесінше x , y , z өстеріне қатысты моменттерінің алгебралық қосындылары.

Бірінші бағанадағы үш теңдеуден – N_z , Q_z , Q_y ішкі күштері, ал екінші бағанадағы үш теңдеуден M_k , M_y , M_z ішкі моменттері анықталады.

(15.1) теңдеулерінен тұжырымдалатын ішкі күштерді анықтаудың ережелері кейінірек қарастырылады.

Дененің оң және сол бөліктерінің көлденең қима ауданы арқылы бір-біріне тигізетін әсері, яғни ішкі күштері шамасы жағынан тең, бағыты жағынан қарама-қарсы.

Сонымен, ішкі күш әсерлерін анықтау үшін мыналарды орындау қажет:

- 1) ішкі күштер ізделініп отырған қима арқылы жүргізілген жазықтықпен дене кесіліп, екіге бөлінеді;
- 2) бөліктердің бірі алынып тасталады;
- 3) қимаға қалдырылған бөлікке әсер ететін сыртқы күштерді теңестіретін ішкі күштер түсіріледі, яғни алып тасталған бөліктің қалдырылған бөлікке әсері ішкі күштермен көрсетіледі;

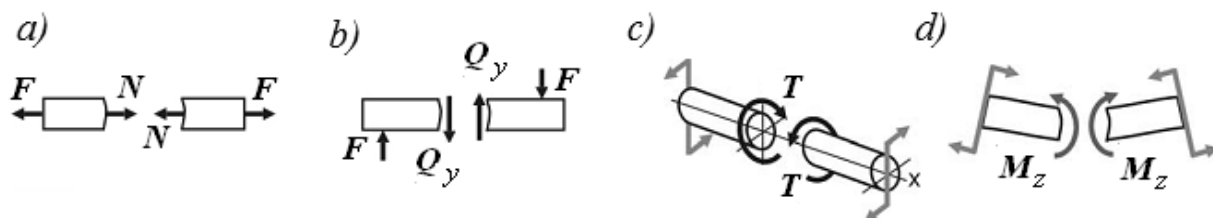
4) қалдырылған бөлікке тұрғызылған тепе-теңдік теңдеулерінен ішкі күш факторлары анықталады.

Дербес жағдайда стерженьнің көлденең қимасы мынадай күйде болуы мүмкін:

1) тек қана бойлық күш N әсер етеді. Мұндай жағдайдағы болатын деформацияны, егер N күші қимадан сыртқа қарай бағытталған болса, **созылу** деп, ал N күші қимаға қарай бағытталған болса, онда **сығылу** деп атайды (15.6, *a*-сурет);

2) тек қана Q_y немесе Q_z көлденең күштері әсер етеді (15.6, *b*-сурет). Бұл жағдайда **ығысу** немесе **кесілу** деформациялары туындайды;

3) тек қана бұрау моменттері T әсер етеді (15.6, *c*-сурет). Мұндағы деформация **бұралу** деп аталады;



15.6-сурет

4) тек қана M_y немесе M_z ию моменттері әсер етеді (15.6, *d*-сурет). Бұл жағдайдағы деформация **таза иілу** деп аталады. Егер тек қана Q_y пен M_z немесе Q_z пен M_y ішкі күштері әсер етсе, деформация **көлденең иілу** делінеді;

5) бірнеше ішкі күштер әсері, мысалы, бұралу және ию моменттері әсері. Мұндай жағдайлар **күрделі деформация** немесе **күрделі қарсыласу** деп аталады.

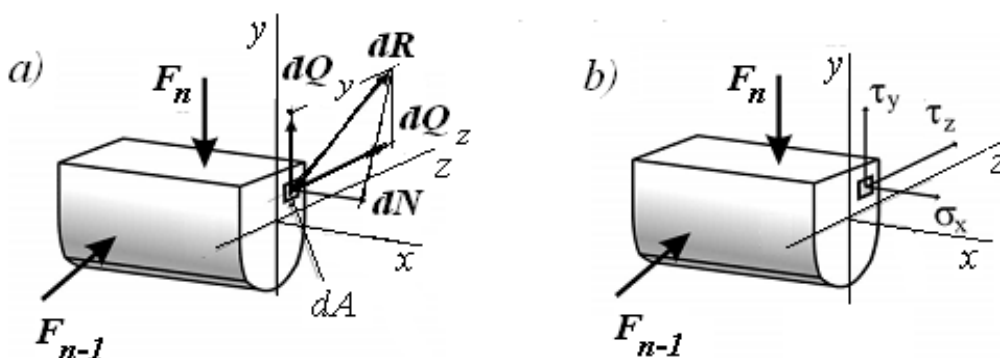
Сыртқы теңестірілген күштер жүйесі түсірілген стерженьді қарастырайық. Жоғарыда айтылғандай, ойша қиып алынған оның әрбір бөлігі өздеріне түсірілген сыртқы күштер мен қимадағы ішкі күштері әсерінен тепе-теңдікте болады (15.6, *c*-сурет). Стерженьнің алынып тасталған бөлігінің әсерін көрсететін ішкі күштер қимада үздіксіз таралады.

Кернеулі күйі деп аталатын, жүктелген стержень материалы жағдайының ең маңызды сипаттамасы болып ішкі күштердің қарқындылығы, яғни серпімді күштердің қима ауданының бірлігіне

шаққандағы шамасы есептеледі. Бұл шама **кернеу** деп аталады. Материалдың кернеулі күйін зерттеу, яғни жүктелген конструкция элементтерінің кез келген қимасындағы кернеуді анықтау материалдар кедергісінің ең маңызды есептерінің бірі болып табылады.

Серпімді күштердің таралу заңдылығын зерттеу үшін, қима бетіндегі кез келген нүкте төңірегіндегі, ауданы шексіз кіші dA болатын элементар қиманы бөліп алайық. Осы элементар қимаға түсетін серпімді күштердің тең әсерлі күші dR бас вектор болсын делік (15.7, а–сурет). Бас вектор dR -дің шексіз кіші аудан dA -ға қатынасы жүргізілген қиманың берілген нүктесіндегі **толық кернеу** деп аталады.

$$p = \frac{dR}{dA}. \quad (15.2)$$



15.7-сурет

Берілген нүктедегі ішкі күштердің қарқындылығын неғұрлым дәлірек білгіміз келсе, соғұрлым элементар қиманы бөліп алуымыз қажет.

Кернеудің өлшем бірлігі: H/m^2 , $кН/m^2$, $МН/m^2$ немесе $Па$, $КПа$, $МПа$. $1КПа = 10^3 Па$, $1МПа = 10^6 Па$.

Қарастырылған қимадағы берілген нүктенің кернеуі – векторлық шама, ол бағытымен және шамасымен анықталады.

Есептеулерде толық кернеудің орнына оның σ **тік** және τ **жанама** құраушыларын қолданған ыңғайлы. Толық кернеудің көлденең қима жазықтығына перпендикуляр Ox өсіне түсірілген проекциясы **тік кернеу** деп аталып, σ әрпімен белгіленеді, ал қима

бетіне түсірілген проекциясы **жанама кернеу** деп аталып, τ әрпімен белгіленеді. Осы ұғымды қарастырайық.

Бас вектордың dR x , y , z өстеріндегі проекциялары элементар dN бойлық және dQ_z , dQ_y элементар көлденең күштерді береді. dN , dQ_z , dQ_y шамаларын шексіз кіші dA элементар қиманың ауданына бөліп, берілген нүктенің аудан бірлігіне келетін бойлық және көлденең күштердің шамаларын аламыз.

Тік кернеу σ – өстік ішкі күштің қарқындылығы немесе қарастырылған қиманың берілген нүктесінің аудан бірлігіне келтірілген өстік күш (15.7, b-сурет)

$$\sigma = \frac{dN}{dA}. \quad (15.3)$$

Жанама кернеу τ_z , τ_y – ішкі көлденең күштің қарқындылығы немесе қарастырылған қиманың берілген нүктесінің аудан бірлігіне келтірілген көлденең күш (15.7, b-сурет).

$$\tau_z = \frac{dQ_z}{dA}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}. \quad (15.4)$$

Жалпы алғанда, берілген нүктедегі кернеу элементар қиманың жазықтығына кез келген α бұрышымен түсуі мүмкін.

Әлбетте, тік және жанама кернеулердің шамалары

$$\sigma = p \sin \alpha, \quad \tau = p \cos \alpha. \quad (15.5)$$

Демек, толық кернеудің шамасы

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (15.6)$$

«Кернеу» деген ұғым беріктікке есептеуде ең маңызды қызмет атқарады. Сондықтан материалдар кедергісінің анағұрлым үлкен бөлігі σ және τ кернеулерін есептеудің тәсілдерін зерттеуге бөлінеді.

Материалдар денеге түсірілген жүктемеге кернеудің белгілі бір шамасына дейін төтеп бере алады, ал одан кейін бұзылып қирайды.

Мұндай кернеулер *беріктік шегі* немесе *уақытша қарсыласу* деп аталады. Әртүрлі материалдардың беріктік шектері де әртүрлі және олардың шамалары әрбір жеке жағдайда тәжірибелік жолмен анықталады.

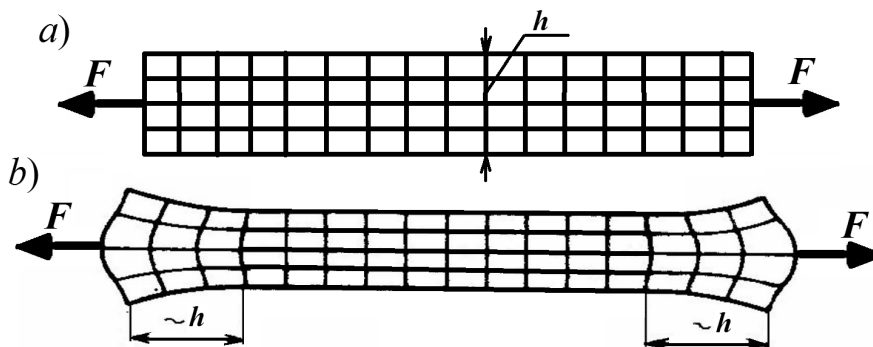
Қайталау сұрақтары:

1. Материалдар кедергісі деген қандай ілім?
2. Пәндегі қарастырылатын негізгі объектілер және оларға тән геометриялық белгісін атап беріңіз.
3. Қадалған күш және момент дегеніміз не?
4. Таралған күштің қандай түрлерін білесіз? Таралған күштің қарқындылығы дегеніміз не?
5. Қию әдісі дегеніміз не?
6. Стерженьді жалпылама жүктеген жағдайда көлденең қимасында қандай ішкі күштер туындауы мүмкін?
7. Ішкі күш әсерінің эпюрасы дегеніміз не және ол не үшін тұрғызылады?
8. Ішкі күштердің таңбалары жөнінде қандай ереже қалыптасқан?
9. Бойлық күш пен бойлық таралған күштің қарқындылығы арасында қандай байланыс бар?
10. Кернеудің анықтамасын беріңіз.
11. Кернеудің қандай түрін білесіз?
12. Курста материалдың құралымы және сипатына қатысты қандай жорамалдар қабылданған?
13. Абсолют және салыстырмалы сызықтық, бұрыштық деформация мен орын ауыстыру жөнінде түсініктеме беріңіз.
14. Сен-Венан принципінің мәнісі неде?
15. Күш әрекеттерінің тәуелсіздік принципі деген не?

16-тарау. БОЙЛЫҚ СОЗЫЛУ МЕН СЫҒЫЛУ

16.1. Созылу мен сығылу жағдайындағы бойлық күштер. Бойлық күштердің эпюралары

Созылу немесе сығылу деп стерженьнің кез келген көлденең қимасында тек бойлық күш туындайтын деформацияны айтамыз. Созылу деформациясымен шынжырларды, арқандарды, бұрандаларды, әртүрлі аспаларды, ал сығылу деформациясымен іргетастар мен тіректерді есептеуде кездесеміз.



16.1-сурет

Бойлық қаралған F күшімен серпімді созылған стерженьді қарастырамыз (16.1, а-сурет).

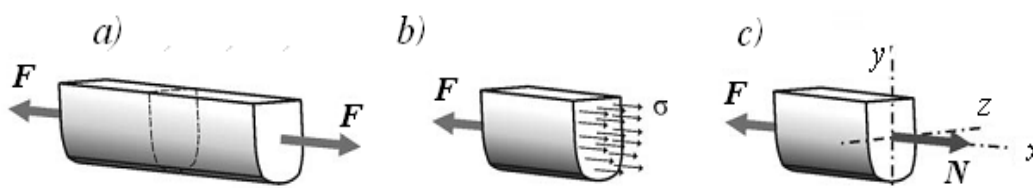
Созылған стерженьнің көлденең қимасында туындайтын ішкі күштерді және кернеулерді зерттемес бұрын, материалдар кедергісінде маңызды орын алатын және осындай стерженьдердің деформациялануымен байланысты жорамалдарды қарастырамыз.

Сен-Венан принципі: конструкция элементінің сыртқы күш түсірілген жерінен жеткілікті қашықтықта жатқан қималардағы нүктелерде пайда болатын кернеулер мен деформациялар сыртқы күштің түсіру әдісіне байланысты емес.

Бернуллидің жазық қималар жорамалы: стерженьнің деформацияға дейінгі жазық көлденең қималары деформациядан кейін де жазық көлденең күйінде қалады. Қарастырылып отырған стержень бетіндегі өзара перпендикуляр түзулердің күш әсерінен кейін де өзара

перпендикуляр күйінде қалатынын көреміз (16.1, *b*-сурет). Көлденең түзулердің өзара параллель қалпында орындарын ауыстыратыны да байқалады.

Стерженьнің көлденең қималарына әсер етуші күштің шамасын анықтау үшін қима әдісін пайдаланып, 1–1 жазықтығымен стерженьді ойша екі бөлікке бөліп (16.2, *a*-сурет), оң бөлігін алып тастап, сол бөлігінің тепе-теңдігін қарастырайық. Қарастырушы бөліктің тепе-теңдік жағдайы сақталуы үшін 1–1 қима жазықтығына тік бағытталған бойлық серпімді күштермен σ әсер етейік (16.2, *b*-сурет).



16.2-сурет

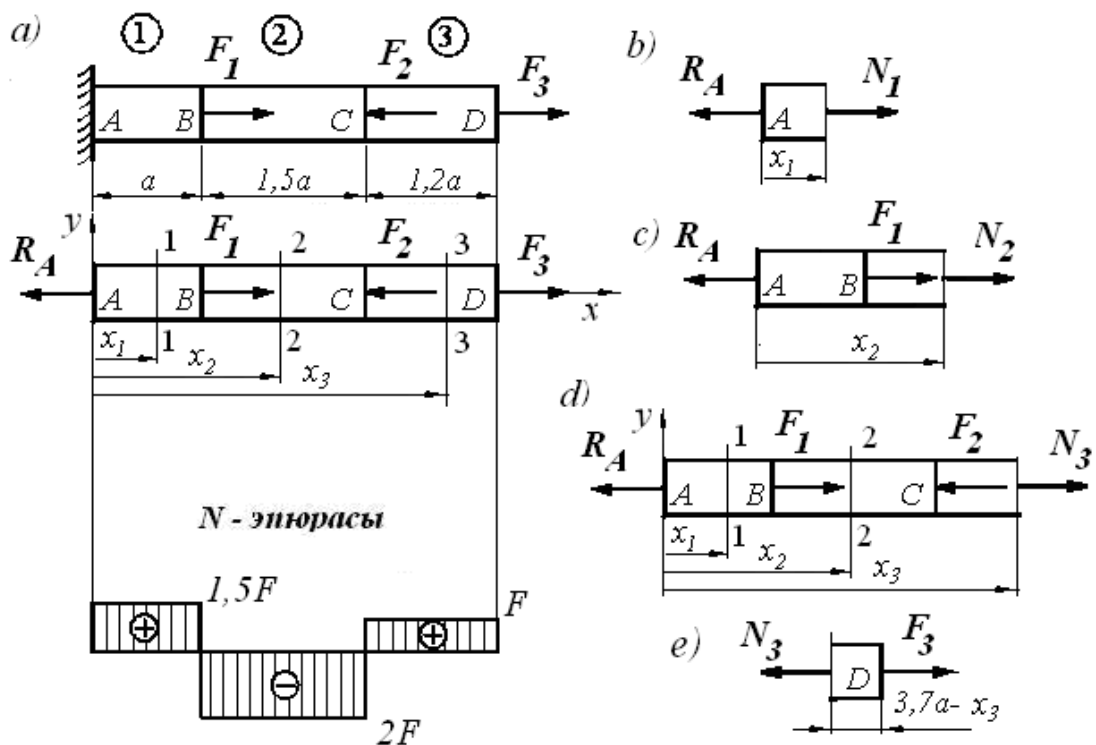
Бұл күштер қарастырылушы бөлікке алынып тасталған бөліктің әсерін сипаттайды. Стерженьнің қимасындағы шексіз кішкене аудандарға әсер етуші ішкі серпімді күштердің тең әсерлі күші N бойлық күшті береді (16.2, *c*-сурет). Бұл тең әсер етуші N күші стержень өсі бойымен әсер етеді және шама жағынан сыртқы әсер етуші F күшіне тең, $N = F$.

Жалпы жағдайда кез келген қимадағы бойлық күш шама жағынан қиманың бір жағында жатқан барлық сыртқы күштердің бойлық өске түсірілген проекцияларының алгебралық қосындысына тең.

$$N = \sum_{i=1}^n F_x^e . \quad (16.1)$$

Бойлық созушы күш (қимадан бағытталған) – оң, ал сығушы күш (қимаға бағытталған) теріс таңбалы деп саналады. Бойлық күштің стержень бойындағы өзгеру заңдылығын кескіндейтін **график бойлық күш эпюрасы** деп аталады.

16.1-мысал. Суретте көрсетілген стерженьнің бойлық күштерінің эпюрасын тұрғызыңыз (16.3-сурет). $F_1 = 3,5F$, $F_2 = 3F$, $F_3 = F$.



16.3-сурет

Шешуі: Стержень берілген күш әсерінен тепе-теңдікте тұр. Алдымен тепе-теңдік шартынан стерженьнің тірек реакциясын анықтаймыз.

$$\sum F_{ix} = 0, \quad -R_A + F_1 - F_2 + F_3 = 0.$$

Мұнан

$$R_A = F_1 - F_2 + F_3 = 3,5F - 3F + F = 1,5F.$$

Стерженьнің сызбасына және жүктелуіне байланысты үш аралыққа бөлеміз де, әрбір аралықтың бойлық күшінің өрнегін тұрғызамыз. Ол үшін қию әдісін пайдаланып, үш аралықтағы қиманың оң бөлігін алып тастап, сол бөлігінің тепе-теңдігін қарастырамыз (16.3, b, c, d-сурет).

$$1\text{-аралық } (0 \leq x_1 \leq a): \quad N_1 = R_A = 1,5F;$$

$$2\text{-аралық } (a \leq x_2 \leq 2,5a): \quad N_2 = R_A - F_1 = 1,5F - 3,5F = -2F;$$

$$3\text{-аралық } (2,5a \leq x_3 \leq 3,7a): \quad N_3 = R_A - F_1 + F_2 = 1,5F - 3,5F + 3F = F.$$

Ал үшінші аралықта қиманың сол бөлігін алып тастап (16.3, *e*-сурет), оң бөлігінің тепе-теңдігін қарастырамыз.

$$3\text{-аралық } (2,5a \leq x_3 \leq 3,7a): \quad N_3 = F_3 = F.$$

Анықталған шамалар бойынша стерженьнің бойлық күштер эпюрасын тұрғызамыз.

16.2. Созылған (сығылған) стерженьнің бойлық, ендік деформациялары. Гук заңы

Көлденең қимасының ауданы тұрақты A шамалы ұзындығы l бір ұшы қатаң бекітілген призмалық стерженьді алып, бетіне тік және көлденең бағытта түзулер жүргізіп, бойлық күшпен әсер етейік (16.4, *a*-сурет). Күш әсерінен стержень созылу деформациясына ұшырайды.

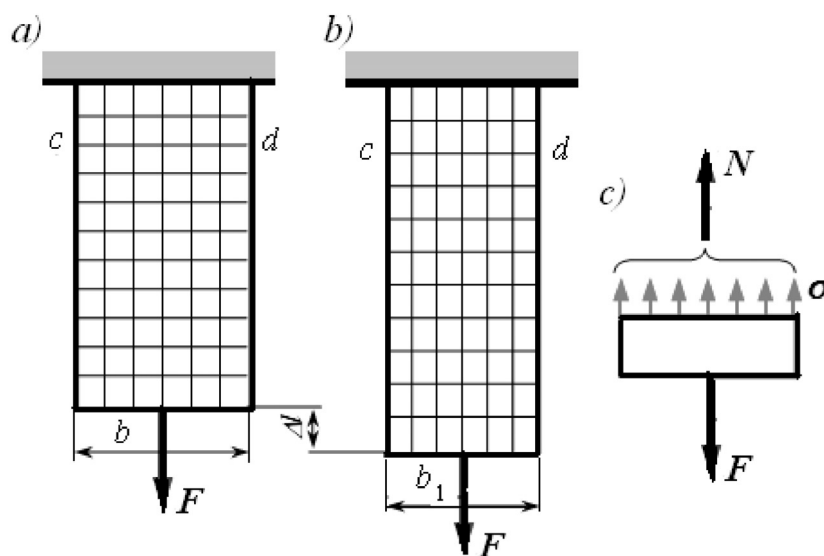
Стерженьнің ұзындығы

$$\Delta l = l_1 - l \quad (16.2)$$

шамасына (16.4, *b*-сурет), ал ені

$$\Delta b = b_1 - b \quad (16.3)$$

шамасына қысқарады.



16.4-сурет

Стерженьнің бастапқы ұзындығының ұзару шамасын Δl – абсолют ұзару, ал енінің қысқару шамасын Δb – абсолют қысқару деп атаймыз.

Δl немесе Δb шамалары бойынша стерженьнің деформациялану қабілетін сипаттауға болмайды, өйткені абсолют ұзару мен қысқару стерженьге әсер етуші күшпен қатар стерженьнің бастапқы өлшем бірліктеріне байланысты. Сондықтан созылған немесе сығылған стерженьнің деформациялану шамасын сипаттау үшін абсолют ұзарудың стерженьнің алғашқы ұзындығына, ал абсолют қысқарудың стерженьнің алғашқы еніне қатынастарын алған дұрыс, яғни

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (16.4)$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}, \quad (16.5)$$

мұндағы ε – бойлық салыстырмалы деформациясы деп, ал ε' – ендік салыстырмалы деформация деп аталады. (16.4) және (16.5) формулаларынан ε мен ε' өлшем бірліксіз шамалар екенін көреміз.

Көптеген тәжірибе нәтижелері әртүрлі материалдар үшін ендік салыстырмалы деформацияның бойлық салыстырмалы деформацияға қатынасының тұрақты шама екенін көрсетеді. Бұл қатынастардың абсолют шамасы ν деп белгіленеді:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|, \quad (16.6)$$

мұндағы ν материалдың қасиетін сипаттайды да, **ендік деформация коэффициенті** немесе **Пуассон коэффициенті** деп аталады. Бұл коэффициенттің мәні әртүрлі материалдар үшін тәжірибелік жолмен анықталады. Барлық изотропты материалдардың Пуассон коэффициентінің мәні 0-0,5 аралығында жатады, мысалы, тығын үшін ν нөлге жақын; көксағыз – 0,5 жақын; шойын – 0,25; болат – 0,33; мыс – 0,34; жез – 0,42-ге жақын.

(16.6) өрнегі стерженьнің сығылу деформациясына да жарамды.

Жоғарыда атап өтілген Бернуллидің жазық қималар жорамалына сүйене отырып, көлденең қималардағы тік кернеулер қима ауданында біркелкі жайылып әсер етеді деп тұжырымдасақ (16.4, с-сурет), тік кернеудің шамасы

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (16.7)$$

Бойлық күш сияқты, созушы кернеудің таңбасы – оң, ал сығушы кернеудің таңбасы – теріс, өлшем бірлігі – $H/m^2 = Па; КПа; МПа$.

Роберт Гук 1660 жылы тәжірибе жүзінде стерженьнің абсолют ұзаруы (сығу жағдайында – қысқаруы) мен оған әсер етуші күштің арасында белгілі байланыс барын ашты. Ол стерженьнің серпімді абсолют ұзаруының стерженьге әсер етуші күш пен стержень ұзындығына тура пропорционалдығын, ал қима ауданына кері пропорционалдығын және оның шамасы материалдың қасиетіне де байланыстылығын тапты ($N = const, A = const$). Бұл заңдылық *Гук заңы* деп аталады:

$$\Delta \ell = \frac{N\ell}{EA}, \quad (16.8)$$

мұндағы E – материалдың бірінші текті серпімділік модулі, ол тәжірибе жүзінде анықталады. Серпімділік модулі – материал қасиетін сипаттайтын коэффициент; өлшем бірлігі кернеудің өлшем бірлігіндей. EA – стерженьнің көлденең қимасының қатаңдығы деп аталады, ол стержень материалының физикалық-механикалық қасиеттері мен көлденең қимасының геометриялық өлшемдерін сипаттайды. EA/ℓ қатынасы *стерженьнің қатаңдығы* деп аталады, ол материалдың созылуға немесе сығылуға қарсыласу қабілеттігін сипаттайды.

Кейбір материалдардың серпімділік модулі ($МПа$): ақ, сұр шойын – $(1,15 \div 1,6) \cdot 10^5$; көміртекті болат – $(2,05 \div 2,1) \cdot 10^5$; мыс – $1,1 \cdot 10^5$; жез – $(0,91 \div 0,99) \cdot 10^5$, алюминий – $0,09 \cdot 10^4$.

Егер стерженнің қарастырылып отырған аралығында тік кернеу мен көлденең қимасы айнымалы болса (16.8), өрнектің негізінде ұзындығы dx шексіз кіші элемент үшін мынаны жазуға болады:

$$\Delta(dx) = \frac{N(x)dx}{EA(x)} .$$

Ұзындығы ℓ аралықтың толық ұзаруын шексіз кіші элементтердің ұзаруларының қосындысы ретінде аламыз:

$$\Delta\ell = \int_0^{\ell} \frac{N(x)dx}{EA(x)} . \quad (16.8, a)$$

Материалымен, көлденең қиманың өлшемдерімен, бойлық күшпен айрықшаланатын бірнеше аралықтан тұратын стержень ұзындығының толық өзгеруі $\Delta\ell$ жекеленген аралықтардың ұзарулары мен қысқаруларының $\Delta\ell_i$ алгебралық қосындысына тең:

$$\Delta\ell = \sum \Delta\ell_i .$$

Қиманың басқа қимаға қатысты орын ауыстыруы стерженьнің қарастырылып отырған қималардың арасындағы бөлігінің бойлық деформациясына тең және λ деп белгілейтінін атап өткен жөн.

Енді $\frac{N}{A} = \sigma$ және $\frac{\Delta\ell}{\ell} = \varepsilon$ екендігін ескере отырып, (16.8)

өрнегін түрлендірейік, сонда

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (16.9)$$

яғни материалдың серпімділік деформация шегі аралығындағы бойлық салыстырмалы деформациялардың кернеулерге тура пропорционалдық заңдылығын, яғни **Гук заңын** аламыз.

Гук заңының бұл түрі конструкция элементтерінің деформациялануы мен беріктігін сынақ жүзінде зерттеулерде кеңінен қолданылады.

Бұл жерде кернеудің деформацияға тура пропорционал заңдылығының әр материалдар үшін кернеу шамасының белгілі бір мөлшерден аспаған жағдайда ғана орындалатынын айта кеткен жөн. Кернеу мен салыстырмалы деформация аралығындағы тура пропорционал заңдылық орындалатын кернеудің ең үлкен шамасын *пропорционалдық шегі* деп атап, σ_{pr} деп белгілейміз. Әртүрлі материалдар үшін σ_{pr} тәжірибемен анықталады.

Сонымен, Гук заңы пропорционал шегі аралығында ғана сақталады.

16.3. Аз көміртекті болаттың созылу диаграммасы

Материалдардың сыртқы күш әсеріне қарсыласу қабілеті мен деформациялануы немесе қирауы олардың механикалық сипаттамаларына тікелей байланысты. Материалдардың механикалық қасиеттері тәжірибе жүзінде арнайы үлгілерді сынау арқылы анықталады. Үлгіні жүктеудің түрлеріне, байланысты сынау статикалық, динамикалық, цикліді сынау деп, ал үлгінің деформациялану ерекшеліктеріне байланысты созуға, сығуға, июге, бұрауға сынау деп т.б. көптеген түрлерге бөлінеді. Жеке жағдайларда үлгілер бұралып иілу, бұралып сығылу сияқты күрделі деформацияларға сыналады. Сынау нәтижесінде алынатын механикалық сипаттамалар материалдардың жұмыс істеу шарттарына, температураға, қоршаған ортаға, күш әсерінің өзгеруі жылдамдығына т. б. факторларға байланысты өзгеріп тұрады. Сондықтан материалдардың механикалық қасиеттерін өзара салыстыру үшін, оларды қатаң түрде бірдей жағдайларда сынады.

Сынама үлгілердің формалары мен өлшемдері, оларды сынау шарттары мемлекеттік стандартта қарастырылып бекітілген.

Сан алуан сынау тәсілдерінің ішінде кең тарағаны – материал үлгілерін созуға сынау. Өйткені созуға сынау нәтижесінде алынатын механикалық шамалар материалдардың сыртқы күшке қарсыласу қабілетін, деформациялануын немесе қирау ерекшеліктерін айтарлықтай толық сипаттайды.

Аз көміртекті болатты созып сынаған кезде алынатын созу диаграммасы 16.5, *a*-суретте көрсетілген. Диаграмманың абсцисса өсінде үлгінің деформациясы – абсолют созылу шамасы, ал ординат

өсінде деформация тудыратын күш өрнектелген. Бұл диаграммадан төмендегідей негізгі механикалық сипаттамалар анықталады:

– Гук заңына бағынышты аралықтағы (диаграммада – OA аралығы) ең үлкен кернеу σ_{pr} . Бұл кернеу σ_{pr} **пропорционалдық шек** деп аталады да, келесі өрнекпен анықталады:

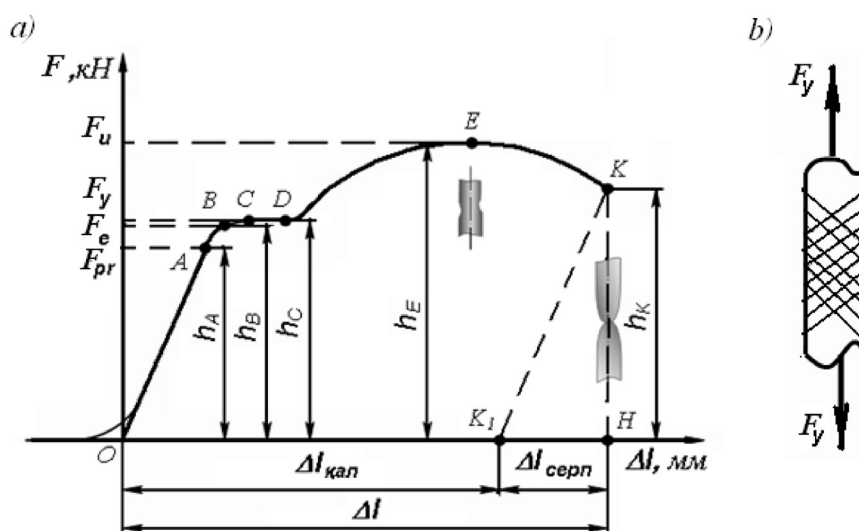
$$\sigma_{pr} = \frac{F_{pr}}{A_0}, \quad (16.10)$$

мұндағы: F_{pr} – пропорционалдық шекке сәйкес күштің шамасы; A_0 – үлгінің жүктемеге дейінгі көлденең қимасының ауданы.

– Қалдық немесе пластикалық деформация тудырмайтын кернеудің ең үлкен шамасын (диаграмма B нүктесі) **серпімділік шегі** деп атап, келесі өрнекпен есептейді:

$$\sigma_e = \frac{F_e}{A_0}, \quad (16.11)$$

мұндағы: F_e – серпімділік шекке сәйкес күштің шамасы.



16.8-сурет

Материалдардың серпімділік шегінің шын мәнін анықтау өте қиын, көп уақытты және өте дәл өлшегіш құралдарды пайдалануды

қажет етеді. Сондықтан да көп жағдайларда σ_e мен σ_{pr} бір-біріне тең деп алынады.

– Деформацияның өсуі күштің тұрақты мәнінде өтетін кернеудің ең аз шамасын (диаграммада – CD аралығы) **аққыштық шегі** деп атап, келесі өрнекпен есептейді:

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}, \quad (16.12)$$

мұндағы: F_y – аққыштық шекке сәйкес күштің шамасы.

Кернеу шамасы аққыштық шегіне тең болғанда, материал пластикалық деформацияға ұшырайды. Жалтырата өндеген үлгі бетінде бірқалыпты таралған, бойлық өске 45° бұрыш жасай өтетін қалың сызықшалар пайда болады (16.5, b -сурет). Оларды *Чернов-Людерс сызықшалары* деп атайды. Бұл сызықшалар – ең үлкен жанама кернеулер әсер ететін жазықтарда жатқан кристалдардың өзара сығылысу нәтижелері.

– Диаграмманың ең жоғарғы нүктесіне сәйкес келетін (диаграммада – E нүктесі) кернеу **беріктік шегі** деп аталып, шамасы келесі формуламен анықталады:

$$\sigma_u = \frac{F_u}{A_0}. \quad (16.13)$$

мұндағы: F_u – беріктік шекке сәйкес күштің шамасы.

Материалдың беріктік шегін **уақытша қарсыласу шегі** деп те атайды.

Кернеу шамасы беріктік шегіне жеткенше үлгі өне бойы созылып, ал жеткеннен кейін үлгінің бойында (16.5, a -сурет) қылта мойын пайда болады – жіңішкереді. Әсер етуші сыртқы күштің шамасы төмендей бастайды. Қылта мойын пайда болған аралықта көлденең қима ауданының кішіреюіне байланысты кернеу шамасы өсіп, үлгі үзілуге тақайды.

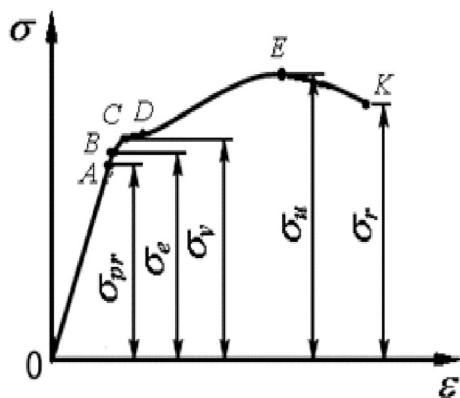
– Үзілу кезіне сәйкес келетін кернеу шамасы **қирау шегі** деп аталып, келесі формуламен анықталады:

$$\sigma_r = \frac{F_r}{A_0}, \quad (16.14)$$

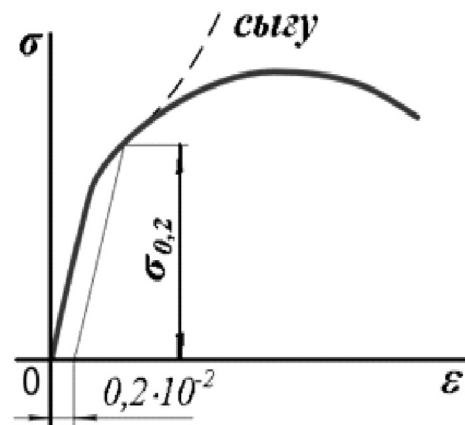
мұндағы: F_r – қирау шекке сәйкес күштің шамасы.

Қарастырылған созу диаграммасы (16.5-сурет) күш пен үлгі деформациясының арасындағы тәуелділікті көрсетеді, сондықтан да ол үлгінің өлшемдеріне байланысты.

Диаграмманың көрсетілген кемшілігінен құтылу үшін ординат өсін $\sigma = F / A_0$ арқылы, ал абсцисса өсін $\varepsilon = \Delta l / l_0$ арқылы өрнектейтін диаграмма тұрғызылады. Бұл диаграмма шартты кернеу диаграммасы деп аталады. Өйткені бұл диаграммадағы механикалық сипаттамалар (σ_{pr} , σ_e , σ_y , σ_u және σ_r) үлгінің сынауға дейінгі бастапқы қима ауданы арқылы анықталған (16.6-сурет).



16.6-сурет



16.7-сурет

Орташа көміртекті болатты, мысты, алюминийді, т.с.с. пластикалық материалдарды сынағанда, созылу диаграммасында материалдың аққыштық кезеңі айқын көрінбеуі мүмкін. Мұндай материалдарға, үлгінің бойлық деформациясы $\varepsilon = 0,002$, яғни 0,2% тең болатын күйге сәйкес келетін шартты аққыштық шек енгізіледі (16.7-сурет). Ол былайша белгіленеді: $\sigma_{0,2}$.

Материалдардың пластикалық қасиеттері оның қалдық салыстырмалы созылуымен немесе жіңішкеруімен сипатталады.

Қалдық салыстырмалы созылу

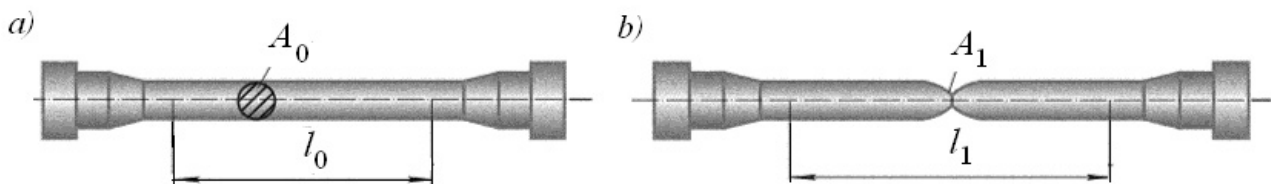
$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\% = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100\%, \quad (16.15)$$

ал қалдық салыстырмалы жіңішкеру

$$\phi = \frac{A_0 - A_1}{A_1} \cdot 100\% \quad (16.16)$$

өрнектерімен анықталады.

Бұл өрнектердегі A_0 , l_0 – үлгінің сынаққа дейінгі көлденең қимасының ауданы мен жұмысшы ұзындығы; A_1 , l_1 – үлгінің сынақтан кейінгі қылта мойын қимасының ауданы мен жұмысшы ұзындығы (16.8-сурет).



16.8-сурет

Сынақты МР-1000 созу машинасында, немесе арнаулы тетікті пайдаланып (реверстік механизм) МС-1000 сынақ машинасында (престе), немесе жоғарғы және орта кәсіпті оқу орындарындағы «Материалдар кедергісі» курсының зертханалық практикумына арналған материалдарды статикалық зерттеу кешені – КСИМ-40 сынақ машинасында жүргізуге болады.

16.4. Деформацияның потенциал энергиясы

Серпінді денеге түсірілген сыртқы күштер дененің геометрияларын өзгеріске келтіреуін туындатып, тиісті орын ауыстыруларға сәйкес A жұмысын атқарады. Сонымен бірге серпінді денеде оның деформациясының U потенциалды энергиясы жинақталады. Динамикалық сыртқы күштер әсер етсе, жұмыстың бір бөлігі дененің кішкентай бөлшектерінің қозғалыстарының K кинетикалық энергиясына айналады. Энергия теңдік теңдеуін, осы күштердің әсеріне дейінгі мерзімде жүйенің энергетикалық күйі нөлге тең деп

және энергияның сейілуі жоқ болуы жағдайында келесі түрде жаза аламыз:

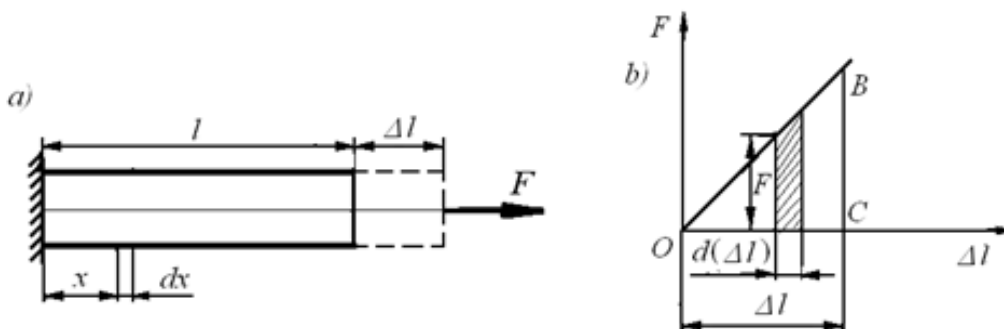
$$A = U + K \quad (16.17)$$

Статикалық жүктеменің әсерінде $K = 0$, демек,

$$A = U \quad (16.18)$$

Бұл дегеніміз – статикалық жүктелген сыртқы күштердің жұмысы толығымен потенциалды энергияға айналады. Денеден жүктемені түсірген кезде дененің жинақтаған потенциал энергиясы есебінен жұмыс жасалады. Сайып келгенде, серпімді дене энергияның қайнар көзі болып есептеледі. Серпімді дененің бұл қасиеті техникада, мысалы, сағат механизмдерінің жүргізуші серіппелерінде, амортизация беретін рессорларда және т.б. кең қолданылады. Қарапайым созылу (сығылу) жағдайында деформацияның потенциал энергияларын есептеудің қажетті байланысын қорыту үшін келесі мәселені қарастырамыз.

16.9, *a*-суретте F күшінің әсерінен созылған стержень бейнеленген, оның ұзаруы Δl кесіндісіне сәйкес келеді, төменірек F күшке байланысты стержень ұзындығының Δl өзгеруінің графигі көрсетілген (16.9, *b*-сурет). Гук заңына сәйкес бұл графиктің сипаты сызықтық кейіпте.



16.9-сурет

F күшінің қандай да бір шамасына стерженьнің Δl ұзаруы тиісті болсын. Күшке ΔF өсімше берейік, оған ұзарудың $d(\Delta l)$ өсімі сәйкес келеді. Онда осы ұзарудың өсімшедегі элементар жұмысының мәні төменгі түрді қабылдайды:

$$dA = (F + dF)d(\Delta\ell) = F \cdot d(\Delta\ell) + dF \cdot d(\Delta\ell), \quad (16.19)$$

екінші қосылғыштың мәнінің өте аз болуына байланысты оны елемеуге болады, онда:

$$dA = F \cdot d(\Delta\ell). \quad (16.20)$$

Олай болса, «жүктеме-орын ауыстыру» арасындағы сызықтық байланысқа сәйкес, элементарлық жұмыстардың қосындысына тең толық жұмыс, F сыртқы күштің $\Delta\ell$ орын ауыстырудағы жұмысы OCB үшбұрыштың ауданына тең болады (16.9, b -сурет), демек:

$$A = \frac{F \cdot \Delta\ell}{2}. \quad (16.21)$$

Өз кезегінде, кернеу σ және деформация ε дене көлемінде V біркелкі таралғанда (қаралып отырған жағдай сияқты), стерженьнің деформациялануының потенциал энергиясын былайша жазуға болады:

$$U = V \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon. \quad (16.22)$$

Сондықтан бұл жағдайда білетініміз: $V = A \cdot \ell$, $F = \sigma \cdot A$ және $\sigma = E\varepsilon$, онда

$$U = A \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{AE\varepsilon^2}{2} = \frac{E\varepsilon \cdot A \cdot \varepsilon \cdot \ell}{2} = \frac{\sigma \cdot A \cdot \Delta\ell}{2} = \frac{F \cdot \Delta\ell}{2}, \quad (16.23)$$

демек, (16.18) өрнегінің әділеттілігі дәлелденді.

(16.9)-ды ескеріп, (16.23) өрнегін келесі түрде жаза аламыз:

$$U = \frac{F^2 l}{2EA}. \quad (16.24)$$

16.5. Мүмкіндік кернеу. Беріктік қоры коэффициенті. Беріктік шарты

Инженерлік құрылыстар мен құрылымдарда пайдаланылатын материалдарды екі топқа бөлуге болады: өте аз деформациядан кейін қирайтын морт материалдар, мысалы, шойын, болат; пішіндері мен өлшемдерінің үлкен өзгеру шамаларынан кейін қирайтын пластикалық материалдар, мысалы, болат, мыс. Созушы және соғушы күш әсерлеріне морт материалдар өте төзімсіз, сонымен қатар жергілікті кернеулерге сезімтал келеді. Пластикалық материалдарда айтылғандай кемшіліктер жоқ. Олар созылуға және сығылуға бірдей қарсыласады.

Әр материал кернеулерінің шектік шамалары (аққыштық, беріктік және қажу шектері) механикалық сынақтармен анықталады. Кернеулердің шектік шамаға жетуі құрылым элементтерінің қирауына не оларда мөлшерден тыс қалдық деформациялардың пайда болуына себепкер болады, яғни материалдардың *қауіпті күй* деп аталатын жағдайын туғызады. Материалдардың осы күйге сәйкес кернеу шамасын *қауіпті кернеу* деп атаймыз.

Құрылымның қауіпсіз жұмыс істеуі үшін, оның элементтеріндегі кернеулердің ең үлкен шамасы қауіпті кернеуден біршама кем болуы қажет. Ол материалдың қауіпті күйінің болмауын қамтамасыз етеді. Сондықтан да кернеудің *қауіпсіз* не *мүмкіндік кернеу* деп аталатын шамасын анықтау жобалау есептерінде үлкен маңызды орын алады. Сонымен, *жобаланатын, есептелетін құрылым элементінің сенімді және ұзақ жұмыс істеуін қамтамасыз ететін кернеудің ең үлкен шамасын мүмкіндік кернеу деп атаймыз*. Бұл кернеу, әрине, қауіпті кернеудің қайсыбір бөлігіне тең болады. Мүмкіндік кернеудің қауіпті кернеуден неше есе кіші екендігін көрсететін n саны *қауіпсіздік коэффициенті* не *беріктік қоры коэффициенті* деп аталады.

Мүмкіндік кернеу әр материалдардың қауіпті күйін және соған сәйкес қауіпті кернеуін туғызатын күш әсерінің түріне және материалға байланысты.

Тұрақты не соғу күш әсерінде пластикалық материалдардың қауіпті күйі мөлшерден тыс қалдық деформацияның (аққыштық) пайда болуымен сипатталады, морт материалдар үшін – сызаттың пайда болуы, не материалдың қирауы. Айнымалы қайталанбалы күш

әсерінде материалдардың қауіпті күйі қажудың микроскопиялық сызаттардың пайда болып және оның дамуымен сипатталады.

Осы әртүрлі жағдайларда қауіпті күйдің туындауына сәйкес келетін қауіпті кернеу:

- а) пластикалық материал үшін аққыштық шегіне (σ_y);
- б) морт материал үшін беріктік шегіне (σ_u);
- в) айнымалы-қайталанбалы күш әсерінде қажу шегіне (σ_{-1}) тең болады.

Сонымен, мүмкіндік кернеу келесі формуламен анықталады.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{cr}}{n}, \quad (16.25)$$

мұндағы $[\sigma]$ – мүмкіндік кернеу; σ_{cr} – қауіпті кернеу; n – беріктік қоры коэффициенті.

Құрылым элементтерінің созылу мен сығылуға қарсыласу беріктігін қамтамасыз ететін өлшем келесі **беріктік шарты** деп аталатын шарттың орындалуы болып табылады:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma], \quad (16.26)$$

мұндағы σ_{max} – қауіпті қиманың қандай да бір нүктесіндегі нақтылы ең үлкен кернеу.

Беріктік қор коэффициенті, ал соған сәйкес мүмкіндік кернеу шамалары көптеген факторларға байланысты. Оның мәнін таңдаудағы негізгі факторлар:

- 1) жеке сыналған үлгілердің және құрылым материалдарының механикалық қасиеттерінің сәйкес келуі;
- 2) есептелуші құрылымның нақты жұмыс жасау жағдайын ескеру;
- 3) кернеуді анықтаудың әдісі мен дәлдігі;
- 4) сыртқы күштің берілуінің дәлсіздігі;
- 5) жобаланушы машиналар мен құрылыстың маңыздылығы мен ұзақтығы.

Мүмкіндік кернеу мен беріктік қор коэффициенті мәндері техникалық шарт және жобалау нормалары бойынша тағайындалады.

Құрылыс болаттарының беріктік қоры коэффициенті шамамен $n = 1,4 \dots 1,8$; морт материалдар үшін $n = 2,5 \dots 3,5$; ағаш үшін $n = 3,5 \dots 6$.

Машиналар мен конструкцияларды және олардың элементтерін жобалағанда, негізінен, келесідей үш есептің түрлерімен кездесуге болады:

1) **Жобалау есебі**, яғни берілген күштердің шамасына сәйкес, тандап алынған материалдан жасалатын құрылым элементінің беріктігін, қатаңдығы мен жеткілікті төзімділігін қамтамасыз ететін қиманың ең аз өлшемдерін анықтау:

$$A = \frac{N_{max}}{[\sigma]}. \quad (16.27)$$

2) **Беріктікті тексеру есебі**, яғни белгілі күштердің шамасы мен құрылым элементтерінің көлденең қима өлшемдері бойынша элементтердегі нақтылы кернеулердің ең үлкен шамасын анықтап, мүмкіндік кернеумен салыстыру:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]. \quad (16.28)$$

3) **Жүк көтеру қабілетін анықтау есебі**, яғни белгілі құрылым элементтерінің көлденең қима өлшемдері мен материалдарының мүмкіндік кернеуі бойынша құрылым элементтерінің жүк көтеру қабілетін анықтау.

Беріктік шартына сүйеніп, созылу деформациясына сәйкес (пластикалық материалдар үшін) жоғарыда қарастырылған үш есептің математикалық түрін өрнектесек, келесідей болады:

$$N_{max} = [\sigma]A. \quad (16.29)$$

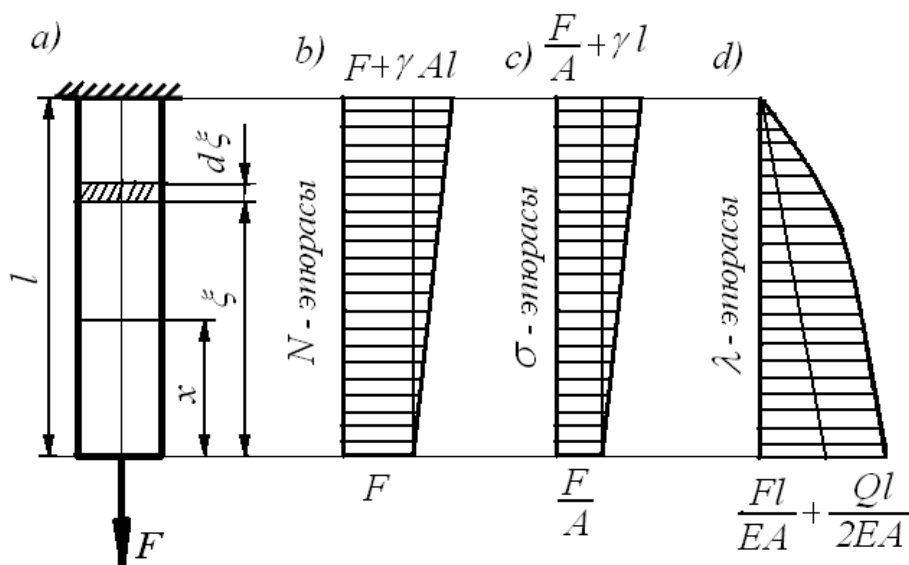
16.6. Ауырлық күш әсері

Конструкция элементтерінің ауырлық күші (өз салмағы) қарастырылып отырған объектінің көлемі бойынша таралған сыртқы күш болып саналады. Стерженьнің созылуын және сығылуын

зерттеп, олардың ішкі күштерін, кернеулерін және деформациясы мен орынауыстыруларын тапқан кезде, біз стерженьнің өзсалмағын ескермегендік. Енді осы ауырлық күштің созылуға немесе сығылуға әсері қаншалықты екенін анықтайық.

Әдетте, машина жасау саласында ауырлық күш әсері аздау болғандықтан ескірілмейді, өйткені машина тетіктерінің өлшемдері салыстырмалы кішкентай. Сонымен қатар біраздаған инженерлік конструкцияларда ауырлық күш негізгі жүктеме болып саналады. Мысалы, шахта көтергіштерінің арқандардың, бұрылғы қондырғылардың қарнағын, көпірлердің тіректерін, имараттардың қабырғаларын, плотиналарды есептеуде ауырлық күшті ескеру қажет.

Тұрақты көлденең қималы, ұзындығы үлкен, түзу стержень жоғарғы ұшымен қатаң бекітіліп, бос ұшы F күшімен жүктелген делік (16.10, a -сурет). Ауырлық күшті санаққа ала отырып, бойлық күштердің және стерженьнің көлденең қимасындағы кернеулердің таралу заңдылығын, сонымен қатар қималардың стерженьді бойлай орын ауыстыруын анықтайық.



16.10-сурет

Стерженьнің бос ұшынан x қашықтықта жататын қимадағы бойлық күш

$$N(x) = F + \gamma Ax, \quad (16.30)$$

мұндағы γ – материалдың меншікті салмағы.

Жоғарғы бекітілген қимада бойлық күш ең үлкен мәніне жетеді:

$$N_{max} = F + \gamma A \ell. \quad (16.31)$$

Бойлық күштің эпюрасы 16.10, *b*-суретте көрсетілген.

Стерженьнің бос ұшынан x қашықтықта жататын қимадағы тік кернеуді $N(x)$ -ті қиманың ауданына бөліп анықтаймыз:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{F}{A} + \gamma x. \quad (16.32)$$

Тік кернеу ең үлкен мәніне жоғарғы бекітілген қимада жетеді, бұл жағдайда ол қауіпті кернеу болады:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma \ell. \quad (16.33)$$

Бұл өрнектегі бірінші қосылғыш F күшінен, ал екіншісі ауырлық салмақтан туындайтын кернеуді көрсетеді. Тік кернеу эпюрасы 16.10, *c*-суретте көрсетілген.

Стерженьнің бос ұшынан x қашықтықта жатқан қиманың орын ауыстыруын анықтаймыз. Бұл қиманың орын ауыстыруы стерженьнің осы қимадан жоғары орналасқан бөлігінің ұзаруына байланысты.

Стерженьнің бос ұшынан ξ қашықтықта жататын қимадағы бойлық күш $N(x) = F + \gamma A \xi$ тең. (16.8, *a*) өрнегінен $F = const$ болғанда:

$$\lambda(x) = \int_x^\ell \frac{N(\xi)}{EA} d\xi = \int_x^\ell \frac{F + \gamma A \xi}{EA} d\xi = \frac{F(\ell - x)}{EA} + \frac{\gamma}{2E} (\ell^2 - x^2). \quad (16.34)$$

Стерженьнің ұзаруын $\Delta \ell$ (немесе соған тең стерженьнің төменгі қимасының орын ауыстыруын λ) (16.34) өрнегінде $x = 0$ деп алып анықтаймыз:

$$\Delta \ell = \frac{F \ell}{EA} + \frac{\gamma \ell^2}{2E}. \quad (16.35)$$

Бұл өрнектегі бірінші қосылғыш F күшінен, ал екіншісі ауырлық салмақтан туындайтын стерженьнің ұзаруын көрсетеді.

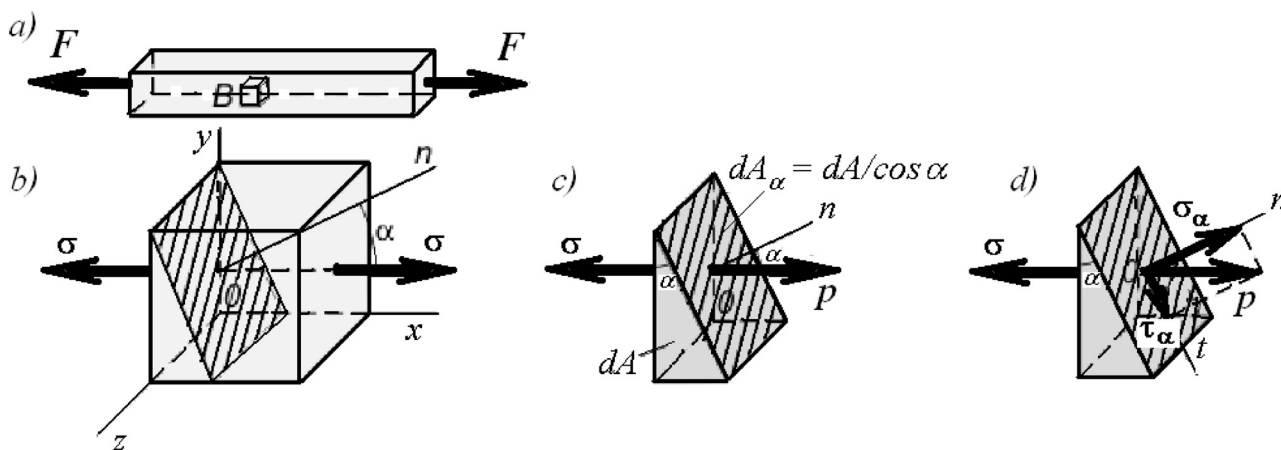
Стерженьнің толық салмағы $Q = \gamma Al$ ескерсек, (16.35) өрнегін былайша жазуға болады:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{Ql}{2EA}. \quad (16.36)$$

Сонымен, стерженьнің өзсалмағынан туындайтын абсолют ұзаруды стерженьнің ауырлық центріне түсірілген, ауырлық күшке тең қадалған күштен туындайтын ұзару деп қарастыруға болады. Орынауыстырудың эпюрасы 16.10, d -суретінде көрсетілген.

16.7. Созылған стерженьнің көлбеу қималарындағы кернеулері. Бас кернеулер

Созылу мен сығылу деформациясын оқып үйренгенімізде, біз білеудің кез келген көлденең қимасындағы бірқалыпты таралған тік кернеуді қарастырдық. Енді білеудің көлбеу қимасындағы кернеулерін анықтайық.



16.11-сурет

Бойлық күш әсер еткен білеудің қандай да бір нүктесін O таңдап алайық (16.11, a -сурет) және оны білеуден тыс, жеке тіктөртбұрышты параллелепипед ретінде қарастырайық (16.11, b -сурет). Бернулли заңдылығына байланысты бұл параллелепипедтің білеудің көлденең қимасына параллель қабырғаларына тек тік кернеу, ал басқа

қабырғаларына ешқандай кернеу әсер етпейтінін тұжырымдауға болады. Таңдап алынған элементті сыртқы нормаль білеудің бойлық өсімен α бұрышын жасайтын жазықтықпен қиып, оң бөлігін алып тастап, сол бөлігінің тепе-теңдігін қарастырайық.

Егер α бұрышы бойлық өстен сағат тіліне қарсы бағытта салынған болса – оң таңбалы деп, ал кері жағдайда теріс таңбалы деп саналады.

Қарастырылып отырған бөлік өзінің тепе-теңдігін сақтайды, өйткені ауданы dA бойлық өске перпендикуляр қабырғаға әсер ететін σdA күші ауданы $dA_\alpha = dA / \cos \alpha$ көлбеу қимада әсер ететін бойлық өске параллель $p dA_\alpha$ күшімен теңестіріледі (16.11, c -сурет), яғни $\sigma dA = p dA / \cos \alpha$.

Сондықтан көлбеу қимаға әсер ететін, бірқалыпты жайыла таралған кернеу

$$p = \sigma \cos \alpha \quad (16.37)$$

тең болады, оны **толық кернеу** деп атайды.

Толық кернеуді көлбеу қиманың O_n нормалі мен O_t жанама бағытындағы құраушыларына жіктейік (16.11, d -сурет):

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha, \quad \tau_\alpha = p \sin \alpha.$$

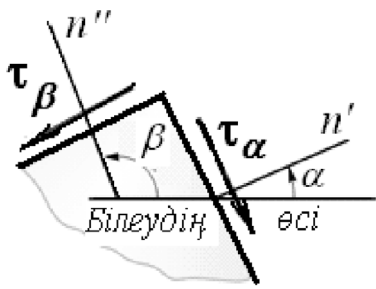
$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ екенін ескере отырып, бұл өрнекке (16.37)-ден p -ның мәнін қойсақ:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad (16.38)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (16.39)$$

Сонымен, білеудің көлбеу қимасында тік және жанама кернеулер әсер етеді. Олардың шамалары белгілі күш әсерінде, қарастырылатын қимасының көлбеу бұрышына байланыстылығын көреміз.

Тік кернеу көлденең қимада ең үлкен мәнге ие болады, яғни (16.39) өрнегінен $\alpha = 0$ болғанда, $\sigma_{max} = \sigma$, ал жанама кернеу ең үлкен мәніне көлденең қиманы 45° бұрышпен көлбеу орналасқан қимада ие болады, яғни $\alpha = \pm 45^\circ$ болғанда, $\tau_{max} = \frac{1}{2} \sigma$ екенін көреміз.



16.12-сурет

Енді қарастырылған көлбеу қимаға перпендикуляр, білеудің бойлық өсімен сыртқы нормалі β бұрышын жасайтын көлбеу қиманы қарастырайық (16.12-сурет). Бұл қимадағы кернеулерді анықтау үшін $\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$ екенін ескеріп, жоғарыда алынған (16.38) және (16.39) теңдіктерінен

$$\sigma_{\beta} = \sigma \sin^2 \alpha, \tau_{\beta} = -\sin 2\alpha$$

деген өрнектерді аламыз.

τ_{α} және τ_{β} өрнектерін салыстырсақ,

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}, \quad (16.40)$$

екенін көреміз.

Яғни өзара перпендикуляр аудандарда әсер етуші жанама кернеулер шамасы жағынан тең, бағыттары жағынан қарама-қарсы болады. Бұл тұжырым *жанама кернеулердің жұптық заңдылығы* деп аталады.

Қарастырылушы қиманың сыртқы нормалімен бағыттас тік кернеулерді оң таңбалы деп есептейміз, егер жанама кернеудің бағыты сағат тілімен 90° -қа бұрылған нормальмен бағыттас болса, оны да оң таңбалы деп есептейміз. Сонымен, созушы кернеулер оң таңбалы болса, сығушы кернеулер теріс таңбалы болады.

Алынған өрнектерден бойлық созылған (сығылған) білеуде жанама кернеуі нөлге тең аяндардың болатындығын көреміз. Әрине, олар білеудің бойлық өсіне перпендикуляр және параллель қималар екені анық.

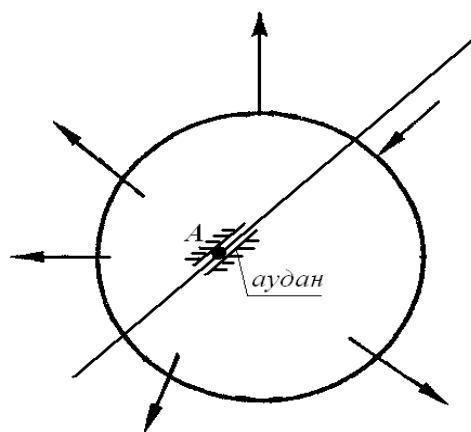
Нүктенің кернеулігі. Материалдардың тұтастығы жорамалына сәйкес, дененің әрбір шексіз кіші бөлшектерінің қаншалықты болмасын өтетін кіші аймағында, оны барлық бағытта қоршайтын, басқада шексіз кіші бөлшектер болады. Белгілі нүктеде орналасқан бөлшек оны қоршаған бөлшектердің әрбірімен әртүрлі әсерлеседі. Сондықтан бір нүктедегі кернеу әртүрлі бағытта әртүрлі болады, тек өте сирек жағдайда барлық бағытта бірдей болуы мүмкін.

Дененің қарастырылатын A нүктесінде қандайда бір бағытта кернеудің әсері бар-жоқтығын білу үшін, осы нүктеден сәйкес жазық қима жүргізу және осы қиманың екі жағынан, A нүктесін қамтитын, кішкентай аудандарды қарастыру керек (16.13-сурет).

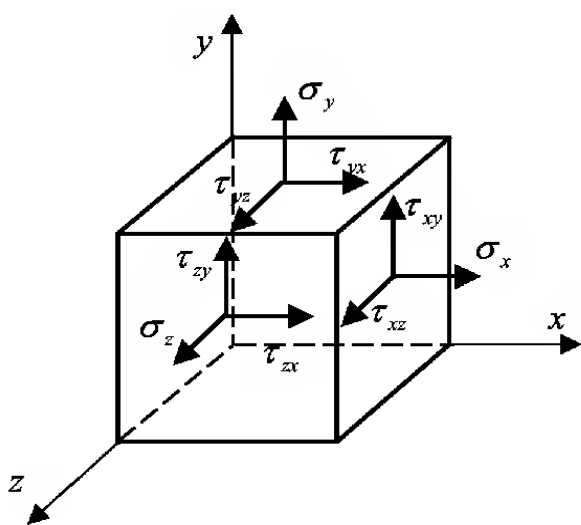
Егер сыртқы жүктеменің әсерінен аудандар бір-бірінен ажырауға немесе бір-бірімен жабысуға ұмтылса, онда олардың арасында созушы немесе сығушы σ тік кернеулер туындайды. Егер аудандар бір-біріне қатысты ығысуға тырысса, онда олардың арасында τ жанама кернеулер туындайды.

Бір нүктенің өзінде нүктенің қай жазықты (қай ауданда) жатуына қатысты кернеу әртүрлі болады. Сонымен, нүкте арқылы жүргізілген сан алуан жазықтықтарда әсер ететін кернеулердің жиынтығы **кернеулі күй** деп аталады.

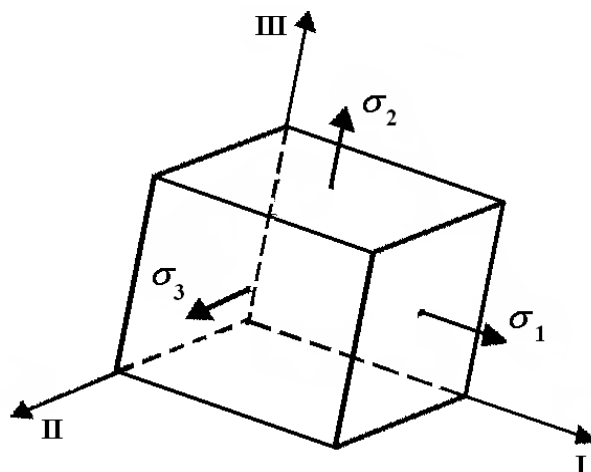
Дененің берілген нүктедегі кернеулі күйін зерттеу үшін оның жанынан, әдетте, шексіз кіші параллелепипед пішінді элемент бөлініп алынады. Оның қабырғаларына дененің алып тасталған бөліктерінің әсерін көрсететін ішкі күштер түсіріледі. Элементтің қабырға аудандарындағы толық кернеу тік және жанама кернеулермен сипатталады (16.14-сурет).



16.13-сурет



16.14-сурет

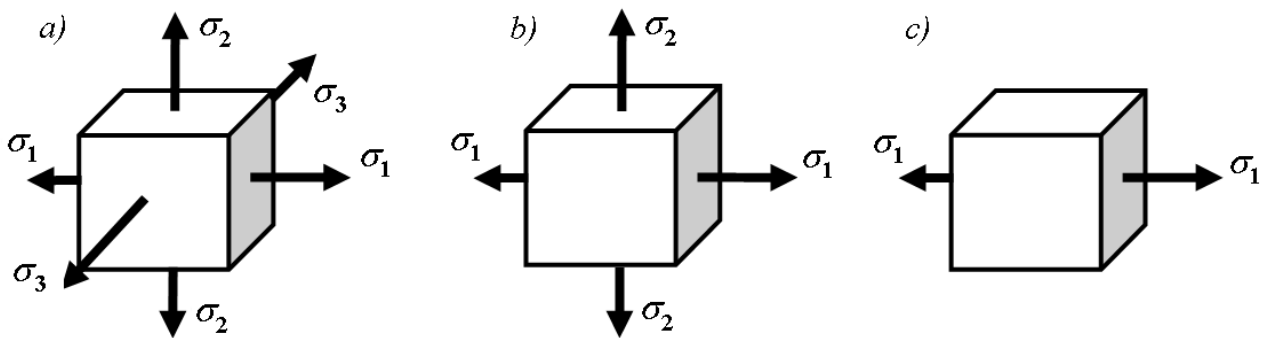


16.15-сурет

Егер бөліп алынған элементтің қабырғаларының бағыттарын өзгертсек, жоғарыда айтылғандай, оларда әсер ететін кернеулердің шамалары өзгереді. Сонда қарастырылатын элемент қабырғаларында жанама кернеу әсер етпейтін ($\tau = 0$) жағдайға келуіміз мүмкін және ол біреу-ақ болады. Бұл элементтің өзара перпендикуляр қабырғаларын – *бас аудандар*, ал оларда әсер етуші тік кернеулерін *бас кернеулер* деп атайды, яғни жанама кернеулері нөлге тең аудандар – *бас аудандар*, осы аудандардағы тік кернеулер *бас кернеулер* (16.15-сурет). Сондықтан әрбір нүктеде үш тік кернеу болады және оларда өзара перпендикуляр. Бас кернеулерге параллель бағыттар берілген нүктедегі *кернеулі күйдің бас бағыттары* деп аталады.

Бас кернеулер – берілген нүктенің кернеулі күйін сипаттайтын тұрақты шамалар. Олар шамалары мен таңбаларына байланысты ең үлкен мәні σ_1 , орташа σ_2 , ең кішісі σ_3 арқылы белгіленеді, яғни бас кернеулер арасында мынадай байланыс бар: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

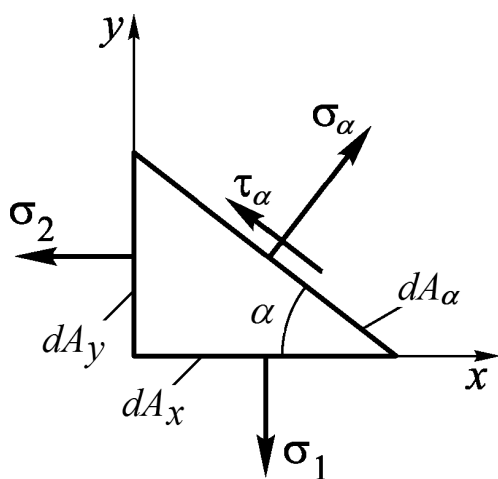
Бас кернеулерінің үшеуі де нөлден айырықша болатын нүктенің кернеулі күйі *үш өстік* немесе *көлемді кернеулі күй* деп (16.16, *a*-сурет), егер екі бас кернеуі нөлден айырықша болса, *екі өстік* немесе *жазық кернеулі күй* деп (16.16, *b*-сурет) аталады. Нүктенің бір ғана бас кернеуі нөлге тең болмайтын кернеулі күйі *бір өстік* немесе *сызықтық кернеулі күй* (16.16, *c*-сурет) деп аталады.



16.16-сурет

Сызықтық кернеулі күйде тек созылған немесе сығылған стерженьдердің нүктелері ғана емес, иілген немесе күрделі деформацияланған стерженьдердің нүктелері де болуы мүмкін. Нүктенің сызықтық кернеулі күйі созылу (сығылу) деформациясын зерттегенде кеңінен қарастырылды. Сондықтан бұл тарауда нүктенің жазық кернеулі күйін зерттейміз.

Жазық кернеулі күй. Көптеген конструкция элементтері жазық кернеулі күйде болады. Көлбеу жазықтық ауданындағы кернеулерді анықтау үшін, 16.17-суретте көрсетілген призмалық элементті қарастырамыз. Оған әсер ететін барлық күштерді көлбеу жазықтықтың нормалі және жанама бағытына проекциялаймыз.



16.17-сурет

$$\sigma_{\alpha} dA_{\alpha} - \sigma_1 dA_x \cos \alpha - \sigma_2 dA_y \sin \alpha = 0 ;$$

$$\tau_{\alpha} dA_{\alpha} - \sigma_1 dA_x \sin \alpha + \sigma_2 dA_y \cos \alpha = 0 ,$$

мұндағы $dA_x = dA_{\alpha} \cos \alpha$ – призманың тік қабырғасының ауданы;

$dA_y = dA_{\alpha} \sin \alpha$ – призманың табан қабырғасының ауданы.

Осыларды ескере отырып, жоғарғы өрнектерден көлбеу жазықтық ауданындағы кернеулерді анықтаймыз:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha ; \quad (16.41)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha . \quad (16.42)$$

Ескертпе: бұл формулаларға сығушы кернеу теріс таңбамен қойылады, ал α бұрышы алгебралық үлкен бас кернеуден бастап саналады.

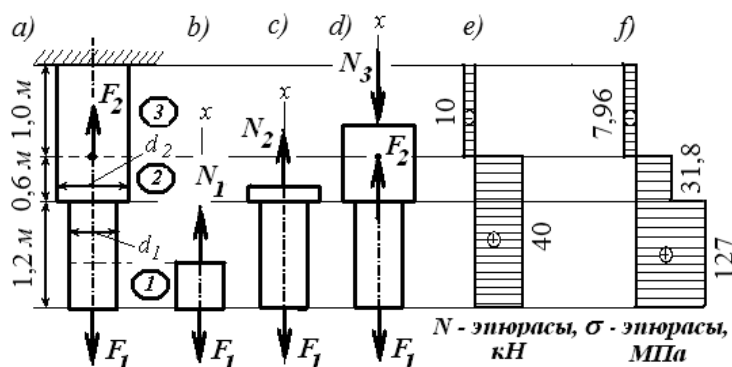
Жанама кернеулер $\alpha = \pm 45^{\circ}$ болғанда ең үлкен мәндеріне жетеді

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} , \quad (16.43)$$

яғни бас жазықтықтарға еңкіштігі 45° аудандарда

16.8. Есептерді шешудің әдістемесі

16.2-мысал. Екі сатылы білеудің бойлық күші мен кернеулерін анықтап, эпюрлерін тұрғызыңыз (16.18, *a*-сурет). Білеудің ұзаруын немесе қысқаруын анықтаңыз. $F_1 = 40\text{кН}$, $F_2 = 50\text{кН}$, $d_1 = 20\text{мм}$, $d_2 = 40\text{мм}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа}$.



16.18-сурет

Шешуі: Білеуді шегі білеудің көлденең қимасының өзгеруімен немесе сыртқы күштің түсіру нүктесімен анықталатын аралықтарға бөлейік. Білеудің бірінші аралығын қиып, ойша үстіңгі бөлігін алып тастайық (16.18, *b*-сурет).

F_1 күші бойлық күшпен теңестіріледі

$$N_1 = F_1 = 40 \cdot 10^3 \text{ Н} = 40\text{кН}.$$

Осы сияқты екінші аралықтың жоғарғы бөлігін алып тастап (16.18, *c*-сурет), N_2 бойлық күшпен теңестірілген, F_1 күші әсер ететін төменгі жағын қарастырамыз:

$$N_2 = F_1 = 40 \cdot 10^3 \text{ Н} = 40\text{кН}.$$

Үшінші аралықтағы N_3 бойлық күші (16.18, *d*-сурет) F_1, F_2 күштерін теңестіреді және олардың алгебралық қосындысына тең:

$$N_3 = F_1 - F_2 = 40 \cdot 10^3 - 50 \cdot 10^3 = -10 \cdot 10^3 \text{ Н} = -10\text{кН}.$$

Бойлық күштердің N эпюрасын тұрғызу үшін білеудің өсіне параллель түзу сызық тұрғызып (базистік немесе нөлдік сызықты), оның сол жағына сығылу күштерін, ал оң жағына созылу күштерін саламыз (16.18, e -сурет).

Білеудің көлденең қимасындағы тік кернеулерді анықтау үшін, бойлық күштердің мәнін сәйкес қималардың ауданына бөлу қажет.

Бірінші қиманың ауданы

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi(2 \cdot 10^{-2})^2}{4} = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

сол сияқты 2 және 3 қиманың аудандары

$$A_2 = A_3 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14(4 \cdot 10^{-2})^2}{4} = 12,56 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Білеудің әрбір аралығындағы кернеуді анықтаймыз және оның эпюрасын тұрғызамыз (16.18, f -сурет)

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{40 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^{-4}} = 127 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 127 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{40 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 31,8 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 31,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{10 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-4}} = -7,96 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = -7,96 \text{ МПа}.$$

Анықталған тік кернеулердің мәндері бойынша σ эпюралары тұрғызылады.

Білеудің толық ұзаруы немесе қысқаруы аралықтардың деформацияларының алгебралық қосындысына тең:

$$\Delta l = \sigma_1 \frac{l_1}{E} + \sigma_2 \frac{l_2}{E} + \sigma_3 \frac{l_3}{E}$$

немесе

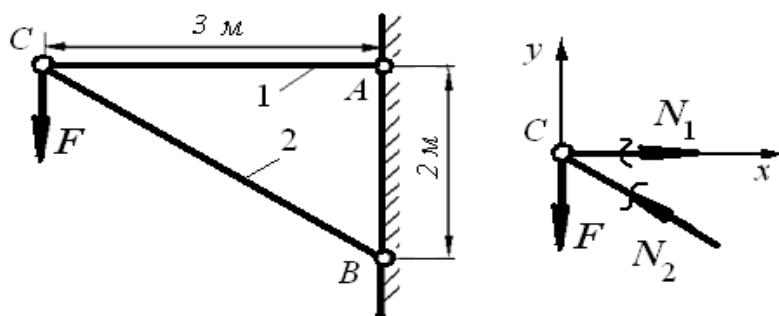
$$\Delta l = \frac{1}{E} (\sigma_1 l_1 + \sigma_2 l_2 + \sigma_3 l_3) =$$

$$= \frac{1}{2,1 \cdot 10^{11}} (127 \cdot 10^6 \cdot 1,2 + 31,8 \cdot 10^6 \cdot 0,6 - 7,96 \cdot 10^6 \cdot 1,0) = 0,78 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

демек, білеудің ұзаруы $\Delta l = 0,78 \text{ мм}$.

16.3-мысал. Суретте көрсетілген кронштейннің AC стержені болаттан, ал BC стержені ағаштан жасалған (16.19-сурет). Материалдардың мүмкіндік кернеулері: болаттікі $[\sigma]_B = 160 \text{ МПа}$, ағаштікі $[\sigma]_A = 4 \text{ МПа}$. $F = 60 \text{ кН}$.

Дөңгелек қималы болат стерженьнің d диаметрін және квадрат қималы ағаш стерженьнің a қабырғасын анықтаңыз.



16.20-сурет

Шешуі: Стүйінін қиып алып, оған әсер ететін күштерді көрсетейік (16.20-сурет). N_1 күшінен AC стержені созылады, ал N_2 күшінен BC стержені сығылады. Күштерді x пен y өстеріне проекциялау арқылы тепе-теңдік теңдеуін құрамыз:

$$\sum X = 0; N_1 - N_2 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y = 0; N_2 \sin \alpha - F = 0.$$

Бұдан

$$N_1 = N_2 \cos \alpha; N_2 = \frac{F}{\sin \alpha}.$$

Кронштейннің суретінен

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{9 + 4} = 3,6 \text{ м.}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3,6}; \cos \alpha = \frac{3}{3,6}.$$

Олай болса, стерженьдердегі бойлық күштердің шамасы:

$$N_2 = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{60 \cdot 3,6}{2} = 108 \text{ кН};$$

$$N_1 = N_2 \cdot \cos \alpha = \frac{108 \cdot 3}{3,6} = 90 \text{ кН}.$$

Стерженьдерге тұрғызылған беріктік шарттарынан:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]_B; \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma]_A$$

олардың көлденең қималарының аудандарын өрнектейміз:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]_B}; A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]_A}.$$

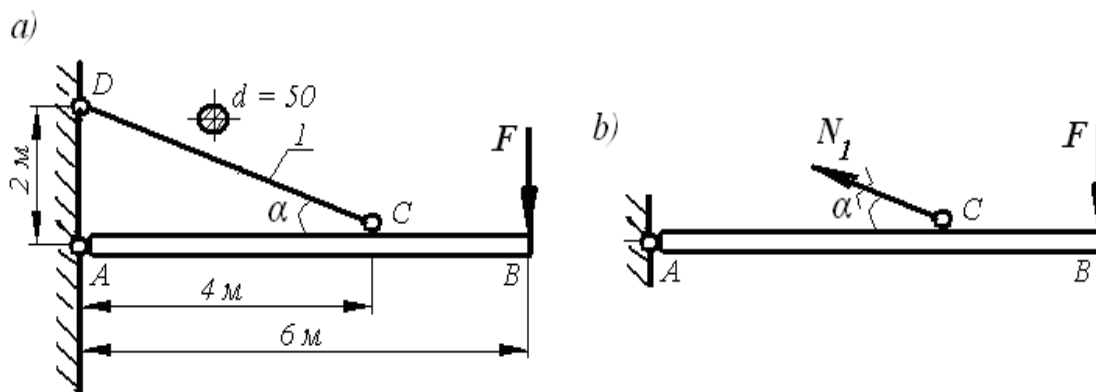
Осы қатынастардан стерженьдердің көлденең қималарының сәйкес сызықтық өлшемдерінің шамасын табамыз:

$$d \geq \sqrt{\frac{4N_1}{\pi[\sigma]_B}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 90 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,027 \text{ м};$$

$$a \geq \sqrt{\frac{N_2}{[\sigma]_A}} = \sqrt{\frac{108 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^6}} = 0,164 \text{ м}.$$

16.5-мысал. Бір ұшы қабырғаға топсалы бекітілген AB білеуі горизонталь бағытта болат CD тартпамен ұстатылған. Егер тартпа

материалының мүмкіндік кернеуі $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ болса, құрылымның жүк көтергіштігі қандай болады (16.21, *a* -сурет)?



16.21-сурет

Шешуі: *CD* тартпасын көлденең қимамен қиып, құрылымның төменгі бөлігі, *AB* білеуінің тепе-теңдігін қарастырайық (16.21, *b*-сурет). Білеуге *CD* тартпасының реакциясы N_1 , құрылымға түсірілген жүктеме F және топсалы жылжымайтын A тірегінің реакциялары (олар 16.21, *b*-суретте көрсетілмеген) әсер етеді. Есептеуге тірек реакцияларының қажеттігі жоқтықтан, A түйініне қатысты күш моменттерінің тепе-теңдік теңдеуін құрамыз:

$$\sum M_A(F_i) = 0; \quad N_1 \cdot AC \cdot \sin \alpha - F \cdot AB = 0.$$

Бұдан

$$F = \frac{N_1 \cdot AC \cdot \sin \alpha}{AB}.$$

Құрылым суретінен ($\triangle ACD$)

$$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ м.}$$

$$\sin \alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Есептің шартынан

$$N_1 = A \cdot [\sigma] = \frac{\pi d^2}{4} \cdot [\sigma] = \frac{\pi \cdot (0,05)^2}{4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 314 \text{ кН} .$$

Олай болса, мүмкіндік жүктеменің шамасы

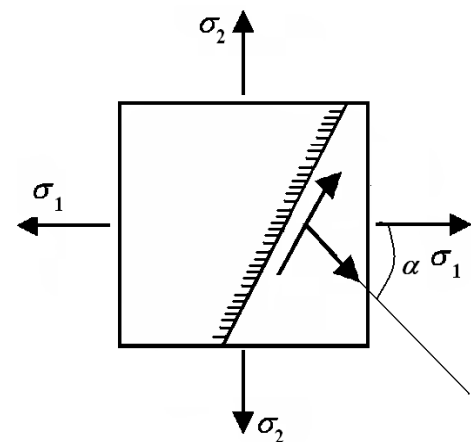
$$[F] = \frac{N_1 \cdot AC \cdot \sin \alpha}{AB} = \frac{314 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}}{6} = 93,6 \text{ кН} .$$

16.6-мысал. Басты кернеулері белгілі жазық кернеулі күйдегі элементтің көлбеу ауданындағы кернеулерді анықтаңыз. $\alpha = 30^\circ$, $\sigma_1 = 80 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 30 \text{ МПа}$ (16.22-сурет).

Шешуі: Көлбеу аудандағы белгілі жазық кернеулерді (16.41), (16.42) формулаларымен анықтаймыз:

$$\sigma_\alpha = 80 \cdot \cos^2 30^\circ + 30 \sin^2 30^\circ = 67,5 \text{ МПа};$$

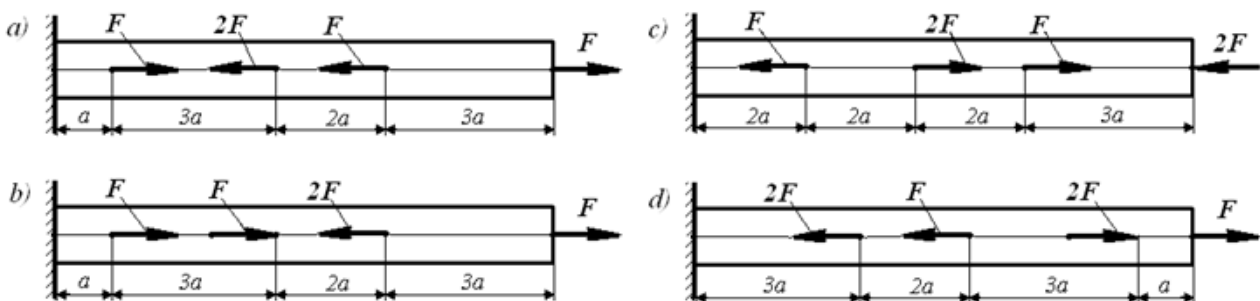
$$\tau_\alpha = \frac{80 - 30}{2} \sin 60^\circ = 21,65 \text{ МПа} .$$



16.22-сурет

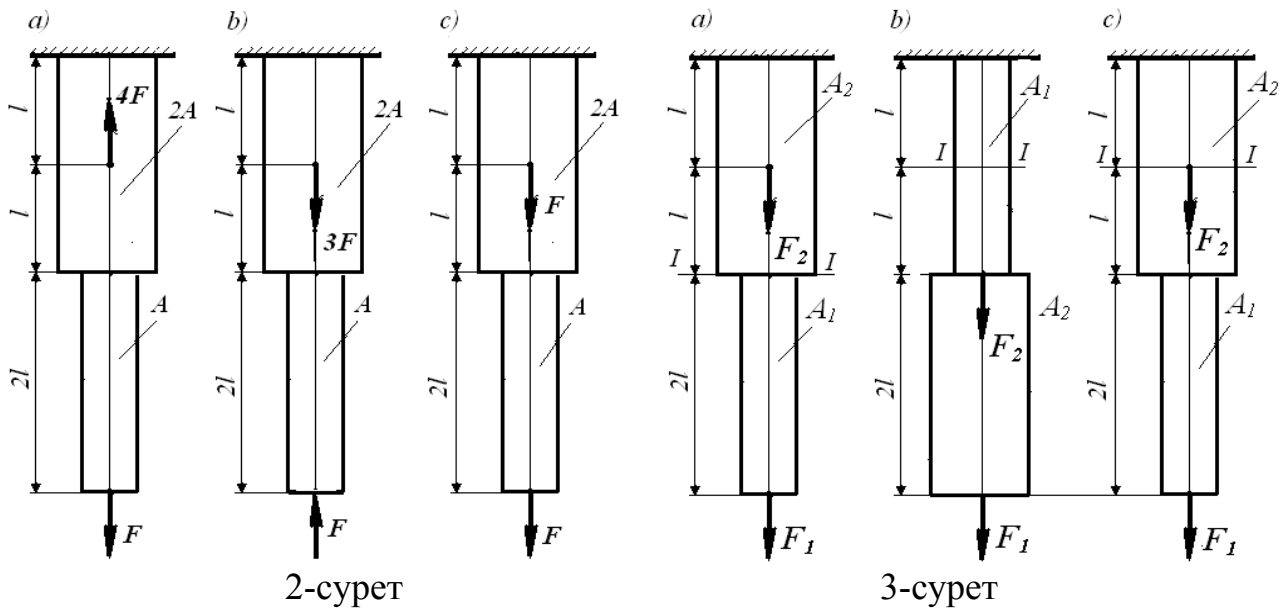
Жаттығу есептері

1-есеп. Бойлық күш эпюраларын тұрғызыңыз (1-сурет).



1-сурет

2-есеп. Бойлық күш пен тік кернеу эпюраларын тұрғызыңыз (2-сурет).

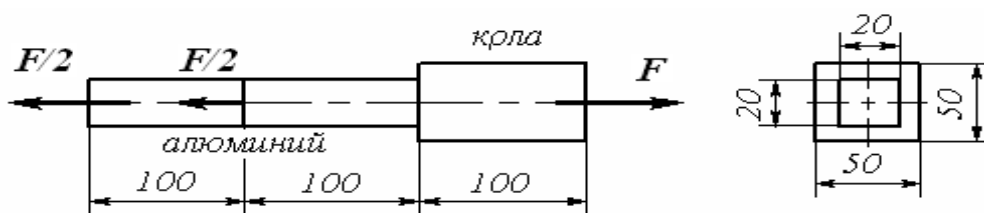


2-сурет

3-сурет

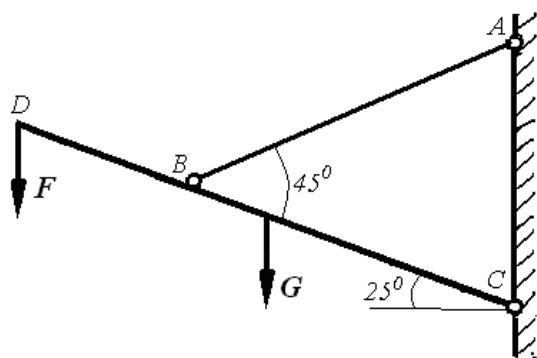
3-есеп. Сатылы стерженьнің абсолют ұзаруы $0,2 \text{ мм}$ болса, суретте көрсетілгендей (3-сурет) стерженьге әсер ететін күштің шамасы қандай? Алюминийдің серпімділік модулі $0,75 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, ал қоланікі $1,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

4-есеп. Сатылы білеудің толық ұзаруын (қысқаруын) анықтаңыз (4-сурет). $F_1 = 6 \text{ кН}$, $F_2 = 10 \text{ кН}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $A_1 = 5 \text{ см}^2$, $A_2 = 8 \text{ см}^2$, $l = 0,5 \text{ м}$,

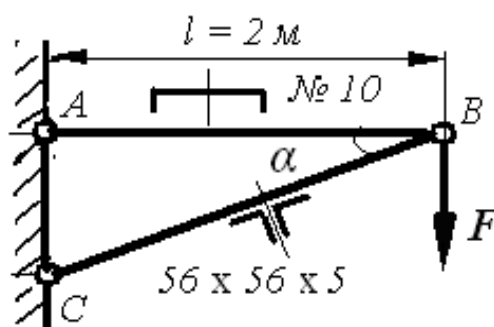


4-сурет

5-есеп. Салмағы $G = 6 \text{ кН}$ CD арқалығын көлденең қимасының ауданы $A = 5 \text{ см}^2$ болат AB тартпасы ұстап тұр (5-сурет). Осы тартпадағы кернеуді және оның ұзаруын анықтаңыз. $F = 10 \text{ кН}$. $CB = 2 \text{ м}$, $BD = 1 \text{ м}$.



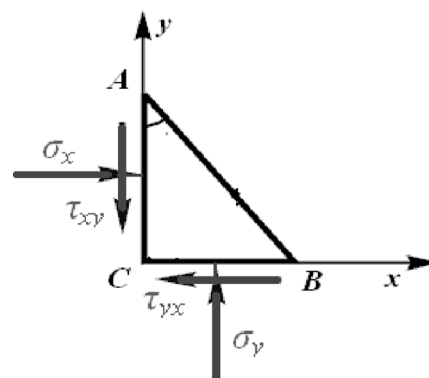
5-сурет



6-сурет

6-есеп. Суретте көрсетілген кронштейннің AB және BC стерженьдерінде туындайтын тік кернеулердің шамасын анықтаңыз (6-сурет). $F = 60 \text{ кН}$.

8-есеп. Бойлық өсі бойымен созылған стерженьнің көлденең қимасындағы ең үлкен тік кернеу -40 МПа , ал көлбеу жазық-тықтағы жанама кернеудің шамасы $-17,3 \text{ МПа}$. Көлденең қима мен көлбеу қима арасындағы бұрышты және көлбеу қимаға әсер етуші тік кернеудің шамасын анықтаңыз.



7-сурет

9-есеп. Суретте көрсетілген (7-сурет) үшбұрышты элементтің AC және CB қырларында бірдей сығушы 50 МПа тік және жанама кернеулер әсер етеді. AB қыры жүктелмеген. AC және CB қырларындағы жанама кернеулердің шамаларын және бас кернеудің шамасы мен бағытын анықтаңыз.

Қайталау сұрақтары

1. Жазық қималар жорамалының мәнісі неде?
2. Созылу мен сығылудың анықтамасын беріңіз.
3. Абсолюттік және салыстырмалы деформация дегеніміз не және олардың өлшем бірліктерін атаңыз. Салыстырмалы бойлық және ендік деформациялар қалай анықталады?
4. Созылу мен сығылу деформациясының Гук заңын тұжырымдап беріңіз және оның формуласын жазыңыз.
5. Пуассон коэффициенті дегеніміз не?

6. Созылған немесе сығылған стерженьнің көлденең қимасында қандай ішкі күш туындайды және оның таңба ережесі қандай?
7. Созылған немесе сығылған стерженьнің көлденең қимасында қандай кернеу туындайды және ол қандай формуламен есептеледі?
8. Созылу мен сығылудың жалпы жағдайы үшін орын ауыстыруды анықтау әдісін тұжырымдаңыз.
9. Көлденең қимасы тұтас дөңгелек пішіндес созылған стерженьнің диаметрін екі есе азайтса, оның кернеулі күйі қалай өзгереді?
10. Көлденең қимасы тұтас дөңгелек пішіндес созылған стерженьнің диаметрін екі есе үлкейтсе, оның беріктігі қалай өзгереді?
11. Көлденең қимасы тұтас квадрат созылған стерженьнің ұзындығын екі есе ұзартса, оның абсолют бойлық деформациясы қалай өзгереді?
12. Аз көміртекті болаттан жасалған үлгінің созылу диаграммасының қандай сипаттамалы нүктелері мен аймақтары бар?
13. Қандай деформацияларды серпімді, қалдық деформация дейміз?
14. Пропорционалдық серпімділік, аққыштық және беріктік шегі дегеніміз не?
15. Материалдың аққыштығы немен сипатталады?
16. Шартты аққыштық шек дегеніміз не және ол қандай материалдар үшін анықталады?
17. Үлгіде қылта мойын қай уақытта пайда болады?
18. Қандай шамалар материалдың беріктік және пластикалық сипаттамалары?
19. Нығайма (тойтару) құбылысы дегеніміз не?
20. Бойлық серпімділік модулі E материалдың қандай қасиетін сипаттайды?
21. Шартты және нақты кернеулер диаграммасы дегеніміз не?
22. Қауіпті кернеу дегеніміз не?
23. Созылған немесе сығылған материалдардың мүмкіндік кернеуі қалай анықталады?
24. Созылу мен сығылудың беріктік шарты қалай жазылады?
25. Беріктік шартымен қандай есептеулер жүргізіледі?
26. Созылған немесе сығылған стерженьнің көлбеу қимасында қандай кернеулер туындайды?
27. Толық кернеу дегеніміз не?

28. Қандай көлбеу қимада ең үлкен тік кернеу туындайды және оның шамасы неге тең?
29. Нүктенің кернеулі күйі дегеніміз не? Кернеулі күйлердің түрлерін атаңыз.
30. Өзара перпендикуляр жазықтықтардағы тік кернеулердің қосындысы неге тең?
31. Қандай жазықтықтарда ең үлкен және ең кіші тік кернеулер туындайды?
32. Қандай жазықтықтар бас жазық деп аталады?
33. Қандай кернеулер бас кернеулер деп аталады?
34. Жазық кернеулі күй жағдайында, нөлден айрықша бас кернеудің әсер сызығының бағытын есептеусіз көрсетуге болады?
35. Жанама кернеулердің жұптық заңының тұжырымдамасын беріңіз.
36. Жазық кернеулі күй жағдайында көлбеу жазықтықтардағы тік және жанама кернеулер қалай анықталады?

17-тарау. СОЗЫЛУ МЕН СЫҒЫЛУДАҒЫ СТАТИКАЛЫҚ АНЫҚТАЛМАҒАН ЖҮЙЕЛЕР

17.1. Статикалық анықталмаған жүйелер жөніндегі жалпы ұғым

Жүктелген стерженьдер мен топсалы-стерженьді жүйелердің тірек реакцияларының немесе ішкі күш әсерлерінің шамасы тепе-теңдік теңдеулерінен (статика теңдеулерінен) анықталатын болса, олар **статикалық анықталған** жүйелерге жатады. Олардан ерекше, **статикалық анықталмаған жүйелер** деп тірек реакцияларының немесе ішкі күш әсерлерінің шамасы тек тепе-теңдік теңдеулерінен анықталмайтын жүйелерді атайды. Сондықтан мұндай жүйелерді есептеу үшін қосымша **бірлесіп деформациялану теңдеулерін**, яғни жүйенің деформациялануын сипаттайтын **қосымша теңдеулер** тұрғызу қажет. Есептеуге қажетті қосымша теңдеулер саны жүйенің **статикалық анықталмау дәрежесін** көрсетеді.

Статикалық анықталған жүйелердің элементтерінде ішкі күштер тек сыртқы күш әсерінен (конструкцияның салмағын да қоса есептегенде) туындайды. Статикалық анықталмаған жүйелерде ішкі күштер сыртқы күш әсері болмаса да туындауы мүмкін. Мысалы, температураның өзгеруінен, тірек бекітпелерінің жылжуынан, конструкцияның кейбір элементтердің дәлдіксіз жасалуларынан.

Статикалық анықталмаған жүйелерді есептеудің ең маңызды сатысы қосымша теңдеулерді тұрғызу болып табылады.

Статикалық анықталмаған жүйелерді есептеу жолы төмендегідей:

1) *Есептің статикалық мағынасы.* Берілген жүйе үшін белгісіз реакциялармен, ішкі күштермен өрнектелген статикалық теңдеулер тұрғызылады. Белгісіз күштердің саны мен құрылған тепе-теңдік теңдеулерінің санының арасындағы айырма арқылы жүйенің статикалық анықталмау дәрежесі есептеліп, қажетті қосымша теңдеулердің саны анықталады.

2) *Есептің геометриялық мағынасы.* Конструкция деформацияланған күйде қарастырылып, оның жеке элементтерінің деформацияларының немесе орын ауыстыру шамаларының арасындағы

байланысты өрнектейтін теңдеу құрылады. Құрылған теңдеу *бірлесіп деформациялану теңдеуі* деп аталады.

3) *Есептің физикалық мағынасы.* Гук заңына сүйене отырып конструкция элементтерінің деформациялары немесе орын ауыстыру шамалары белгісіз ішкі күштер арқылы өрнектеледі.

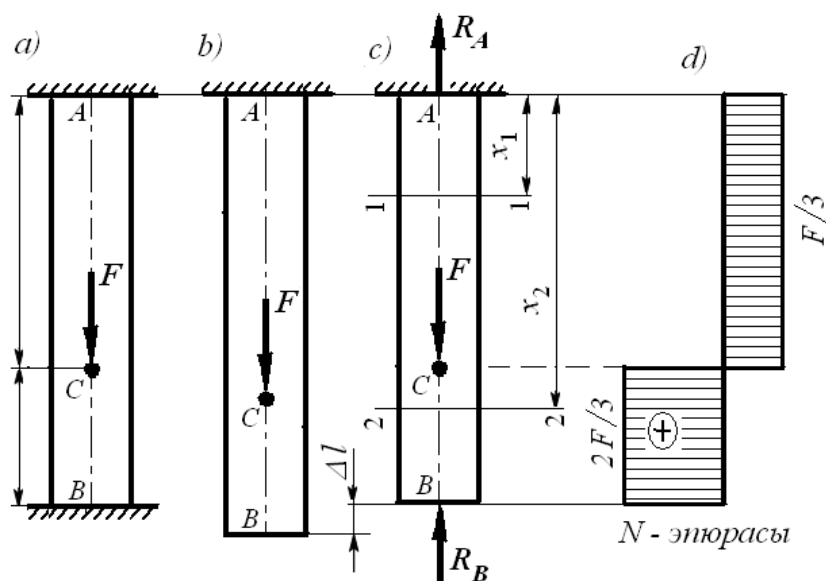
4) *Синтез.* Есептің статикалық және физикалық мағыналарын қарастырып, өзгертілген бірлесіп деформациялану теңдеулерін бірге шешіп, белгісіз күштер анықталады.

Есептеудің соңғы жолдарының статикалық анықталған жүйелерді есептеуден еш өзгешелігі жоқ.

Барлық статикалық анықталмаған жүйелер статикалық анықталған жүйелерге қарағанда «артық» байланыстармен қамтамасыз етіледі. Жүйенің тепе-теңдік күйде болуына «артық» байланыстардың қатысы жоқ, олар тек конструкцияның жүк көтергіштік қасиетін, орнықтылығын арттырады.

Статикалық жүктемемен жүктелген, тепе-теңдікке қажеттен тыс тіректері бар статикалық анықталмаған конструкциялардың созылу мен сығылуға жұмыс жасауын келесі мысалдарда қарастырып көрейік.

17.1-мысал. Екі ұшы қатаң бекітілген, қималарының ауданы тұрақты $A = const$ сатылы стержень бойлық F күшімен жүктелген (17.1, *a*-сурет).



17.1-сурет

Тіректердің реакцияларын H_A, H_B анықтап, бойлық күштердің N эпюраларын тұрғызыңыз.

Шешу: 1. *Есептің статикалық мағынасы.* Берілген стерженьнің тепе-теңдік теңдеулерін құрайық

$$\sum X = 0; \quad H_A - F + H_B = 0; \quad H_A + H_B = F.$$

Нәтижесінде екі белгісізі бар бір теңдеу алдық, бұл есептің бір рет статикалық анықталмағанын көрсетеді, яғни тіректердің реакцияларын анықтап, есептің шартын орындауға бір теңдеу жетіспейді. Сондықтан есепті шешудің келесі сатысын қарастырамыз.

2. *Есептің геометриялық мағынасы.* Ойша төменгі тіректі алып тастап, стерженьнің деформацияланған жағдайын қарастырайық (17.1, *b*-сурет). Берілген күштің әсерінен стержень деформацияланып, бос ұшы төмен түседі. Ал берілген есеп бойынша бұл қимада қатаң тірек болғандықтан, осы қима тірек деңгейінен төмен түсе алмайды, яғни стерженьнің берілген күш әсерінен созылуын байланыс реакциясы H_B теңгереді (17.1, *c*-сурет). Сонымен, стерженьнің толық абсолют деформациясы нөлге тең болады.

Демек,

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_{H_B} = 0.$$

Бұл теңдеуді *бірлесіп деформациялану теңдеуі* деп атайды, мұндағы $\Delta l_F, \Delta l_{H_B}$ – сәйкес F, H_B күштер әсерінен туындайтын стержень аралықтарының бойлық абсолют деформацияларының шамалары.

3. *Есептің физикалық мағынасы.* Көрсетілген деформацияларды Гук заңына сүйеніп, ішкі күштермен өрнектейік:

$$\Delta l_F = \frac{F}{E} \frac{2l}{3} = \frac{2Fl}{3EA}, \quad \Delta l_{H_B} = -\frac{H_B}{E} \left(\frac{2l}{3} + \frac{l}{3} \right) = -\frac{H_B l}{EA}.$$

4. *Синтез.* Есептің физикалық мағынасын қарастырғанда алынған шамаларды геометриялық теңдеуге енгіземіз:

$$\frac{2Fl}{3EA} - \frac{H_B l}{EA} = 0,$$

бұдан

$$H_B = \frac{2F}{3}$$

Статикалық теңдеуден мынау шығады

$$H_A = F - H_B = F - \frac{2F}{3} = \frac{F}{3}.$$

Енді стержень аралықтарының бойлық күштерінің шамаларын анықтайық (17.1, *c*-сурет).

a) *AC* аралығы үшін ($0 \leq x_1 \leq \frac{2l}{3}$)

$$N_1 = H_A = \frac{F}{3}$$

b) *CB* аралығы үшін ($\frac{2l}{3} \leq x_2 \leq l$)

$$N_2 = H_A - F = \frac{F}{3} - F = -\frac{2F}{3}$$

Анықталған бойлық күштердің шамалары бойынша *N* эпюраларын тұрғызамыз (17.1, *d*-сурет).

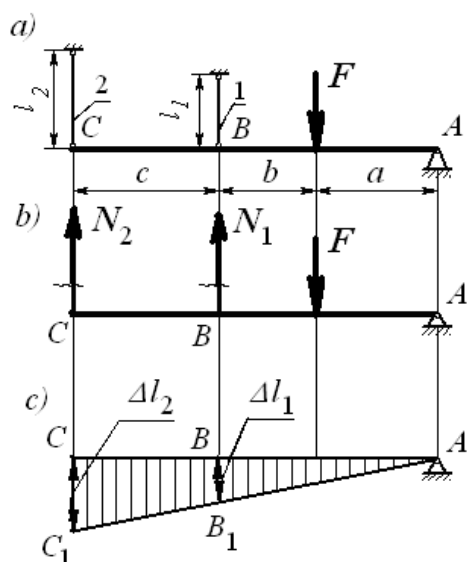
17.2-мысал. Абсолют қатты стержень жылжымайтын топсалы тірекке тіреліп, екі стерженьге топсалы асылған (17.2, *a*-сурет). $a = 2,1$ м, $b = 1,2$ м, $c = 2,4$ м, $l_1 = 1,8$ м, $l_2 = 2,2$ м, $A_1 = 20 \cdot 10^{-4}$ м², $A_2 = 10 \cdot 10^{-4}$ м², $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $F = 60$ кН. Стерженьдерде туындайтын кернеулерді анықтаңыз.

Шешуі: 1. *Есептің статикалық мағынасы.* Стерженьдерді ойша қиып, ізденді N_1 және N_2 күштерін енгізіп, *A* топсасына қатысты момент тұрғызып, конструкцияға әсер ететін күштердің тепе-теңдік теңдеуін аламыз (17.2, *b*-сурет)

$$\Sigma M_A = 0; N_1 \cdot 3,3 + N_2 \cdot 5,7 - F \cdot 2,1 = 0,$$

түрлендіргеннен кейін теңдеу былайша жазылады:

$$N_1 \cdot 3,3 + N_2 \cdot 5,7 = F \cdot 2,1.$$



17.2-сурет

Екі белгісізі бар бір теңдеу алынды, сондықтан жүйе бір рет статикалық анықталмаған.

2. *Есептің геометриялық жағы.* Орын ауыстыру теңдеуін құрамыз. Стерженьдердің деформациялануы нәтижесінде арқалық A нүктесіне қарағанда қандай да бір бұрышқа бұрылып, 17.2, c-суретінде көрсетілген жағдайға келеді.

B және C топсаларының тік орын ауыстыруы, N_1 және N_2 күш әсерлерінен болатын, стерженьдердің сәйкес ұзарулары Δl_1 мен Δl_2 -ге тең.

ABB_1 мен ACC_1 үшбұрыштарының ұқсастығынан мынадай қатынас алынады:

$$\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC} \quad \text{немесе} \quad \frac{\Delta l_1}{a+b} = \frac{\Delta l_2}{a+b+c},$$

сонда стерженьдердің ұзарулары келесідей тәуелдікте болатынын аламыз:

$$\Delta l_1 = \frac{a+b}{a+b+c} \Delta l_2.$$

3. *Есептің физикалық мағынасы.* Гук заңы бойынша стерженьдердің ұзаруын N_1 және N_2 бойлық күштерімен өрнектейміз:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}.$$

Орын ауыстыру теңдеуіне қоямыз

$$\frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{a+b}{a+b+c} \frac{N_2 l_2}{EA_2}.$$

Теңдеудің екі жағын E -ге көбейтіп, $a = 2,1 \text{ м}$, $b = 1,2 \text{ м}$, $c = 2,4 \text{ м}$, $l_1 = 1,8 \text{ м}$, $l_2 = 2,2 \text{ м}$, $A_1 = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $A_2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ және $F = 60 \text{ кН}$ мәндерін қойып, ықшамдап, ақырғы түрленген орын ауыстыру теңдеуін мынадай түрде аламыз:

$$N_1 = 1,42 \cdot N_2.$$

4. *Синтез.* Тепе-теңдік және түрленген орын ауыстыру теңдеулерін

$$\begin{cases} N_1 \cdot 3,3 + N_2 \cdot 5,7 = 126; \\ N_1 = 1,42 \cdot N_2, \end{cases}$$

бірге шешіп, ізденді бойлық күштерді есептейміз

$$N_1 = 17,22 \text{ кН}; \quad N_2 = 12,12 \text{ кН}.$$

Анықталған ішкі күштердің мәндерімен стерженьдердің көлденең қималарындағы кернеуді анықтаймыз

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{17,22 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 8,61 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{12,12 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 12,12 \text{ МПа}.$$

17.2. Температуралық кернеулер

Материалдары, өлшемдері бірдей екі стерженьді алып, біреуін бір ұшынан, ал екіншісін екі ұшынан қатаң бекітіп, стерженьдерді Δt °С қыздырайық. Мектептің физика курсынан белгілідей, қыздырылған дененің геометриялық өлшемдері өзгереді, яғни ұзындығының өзгеруі

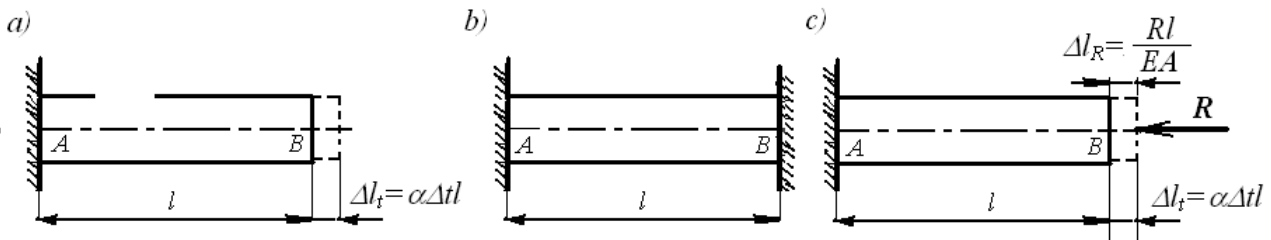
$$\Delta l_t = \alpha \Delta t \cdot l \quad (17.1)$$

тең болады.

Мұндағы α – стержень материалының сызықтық ұлғаю коэффициенті; l – стерженьнің ұзындығы; Δt – стержень температурасының өзгеру шамасы; Δl_t – стержень ұзындығының температура әсерінен ұзару шамасы.

Бірінші стерженьнің (17.3, *a*-сурет) ұзаруына еш кедергі жоқ, сондықтан да ол Δl_t шамаға ұзара алады. Оның көлденең қимасында кернеу туындамайды.

Енді екінші стерженьді қарастырсақ (17.3, *b*-сурет), оның ұзаруына қатаң тіректер мүмкіндік бермейді, сондықтан оның көлденең қимасында сығатын бойлық күштер және кернеулер туындайды. Қарастырылған жағдайда ұзарудың болмауы кернеуді туындатады. Қарастырылып отырған стержень бір рет статикалық анықталмаған, өйткені екі белгісіз күш бар (тірек реакциялары) бір теңдеу құруға болады – барлық күштердің горизонталь өске проекцияларының қосындысы түрінде.



17.3-сурет

Қатаң тіректердің бірін, мысалы, оң жақтағы тіректі алып тастайық, оның стерженьге әсерін тірек реакциясымен алмастырайық (17.3, *c*-сурет). Егерде осы күш болмаса, стержень қыздыру нәтижесінде Δl_t шамаға ұзарар еді.

Шын мәнінде, стержень ұзармайды. Сондықтан да R күші стерженьді қыса отырып, оның ұзындығын Δl_t шамаға тең Δl_R ұзындыққа қысқартады.

Сонымен,

$$\Delta l_R = \Delta l_t. \quad (17.2)$$

Гук заңы бойынша

$$\Delta l_R = \frac{Rl}{EA},$$

Олай болса, (17.1) және (17.2) формулалардың негізінде

$$\alpha \Delta t \cdot l = \frac{Rl}{EA},$$

мұнан

$$R = EA \alpha \Delta t.$$

Стерженьнің көлденең қимасында туындайтын тік сығу кернеуі мына өрнектен анықталады:

$$\sigma = \frac{R}{A} = E \alpha \Delta t. \quad (17.3)$$

Келесі мысалдарды қарастырайық.

17.3-мысал. Болат стержень екі ұшынан қатаң бекітілген (17.4-сурет). Егер стерженьнің температурасын 30° -қа көтерсек, стерженьнің аралықтарының көлденең қималарындағы кернеудің шамасы қандай болады? $A = 2 \text{ см}^2$, $a = 0,2 \text{ м}$, $b = 0,1 \text{ м}$, $c = 0,2 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$.

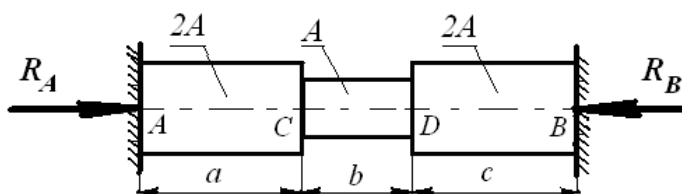
Шешуі: Стерженьді қыздырғанда, оның тіректерінде R_A, R_B реакциялары пайда болады. Олардың шамасын анықтау үшін тек бір тепе-теңдік теңдеуін құра аламыз

$$\Sigma X = R_A - R_B = 0.$$

Демек, есеп бір рет статикалық анықталмаған.

Есептің шығару жолы 17.1-мысалда көрсетілгендей, ойша оң тіректі алып тастап, оның әсерін R_B реактивтік күшпен алмастырамыз.

Бұл жағдайда стерженьді қыздырғаннан B қимасының орын ауыстыруы



17.4-сурет

$$\Delta l_t = \alpha(a + b + c)\Delta t,$$

ал R_B күшінің әсерінен стерженьнің қысқаруы

$$\Delta l_{HB} = -\frac{R_B a}{E \cdot 2A} - \frac{R_B b}{EA} - \frac{R_B c}{E \cdot 2A},$$

немесе

$$\Delta l_{HB} = -\frac{R_B (a + 2b + c)}{2EA}.$$

Демек,

$$\alpha(a + b + c)\Delta t = \frac{R_B (a + 2b + c)}{2EA}.$$

Бұл өрнектен мынау шығады:

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{2\alpha EA(a + b + c)\Delta t}{a + 2b + c} = \\ &= \frac{2 \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4} (0,2 + 0,1 + 0,2) \cdot 30}{0,2 + 2 \cdot 0,1 + 0,2} = 25 \cdot 10^3 \text{ Н} = 25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Стержень аралықтарының кернеулері:

$$\sigma_a = \frac{R_B}{2A} = -\frac{25 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -62,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\frac{R_B}{A} = -\frac{25 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = -125 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = -\frac{R_B}{2A} = -\frac{25 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -62,5 \text{ МПа}.$$

17.4-мысал. Арқалық жылжымайтын топсалы тірекпен қатар көлденең қималарының аудандары бірдей екі болат тартқышпен ұстатылған (17.5, a -сурет). Тартқыштарды қондырғаннан кейін, олардың температуралары $\Delta t = +20^\circ$ көтерілген. Тартқыштардың

көлденең қимасындағы кернеулердің шамасын анықтаңыз. Тартқыштардың көлденең қимасының аудандары $A = 40 \text{ см}^2$. $AC = 2BC$, $M_z, M_y, \alpha = 1,25 \cdot 10^{-7}$.

Шешуі: Тартқыштарды жазықтықтармен қиып, арқалықтың тепе-тендік жағдайын қарастырайық (17.5, b-сурет).

$$\sum M_C = -2N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 60^\circ,$$

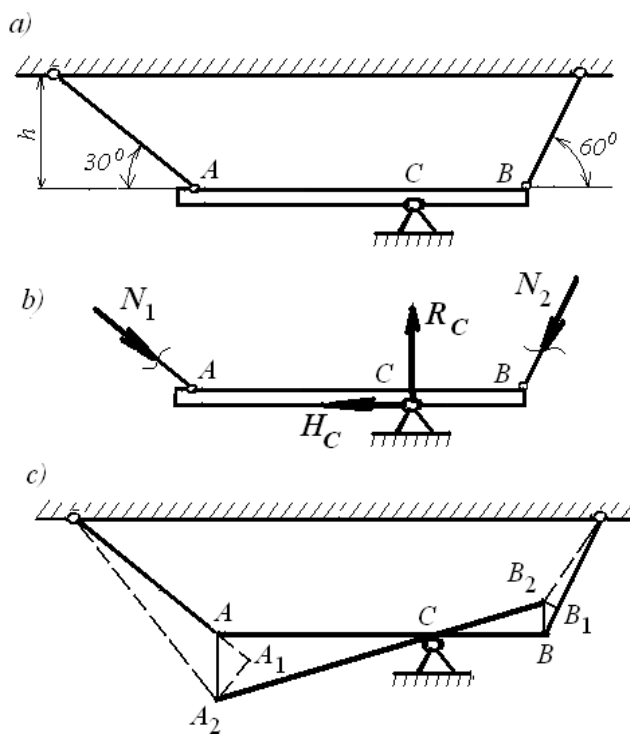
немесе

$$-N_1 + 0,866N_2 = 0.$$

Есеп бір рет статикалық анықталмаған.

Жүйенің 17.5, c-суретте көрсетілген деформация жоспарын қарастырамыз

$$\Delta CAA_2 \sim \Delta CBB_2.$$



17.5-сурет

Олай болса,

$$\frac{AA_2}{AC} = \frac{BB_2}{AB},$$

мұндағы AA_2 және BB_2 сәйкес AA_1A_2 және BB_1B_2 үшбұрыштарынан

$$AA_2 = \frac{AA_1}{\sin 30^\circ} = 2\Delta l_1, \quad BB_2 = \frac{BB_1}{\sin 60^\circ} = 1,155\Delta l_2.$$

Осы шамаларды жоғарғы қатынасқа қойсақ, жүйенің деформациялық теңдеуін аламыз

$$\Delta l_1 = 1,155\Delta l_2.$$

Тартқыштардың деформацияларын температураларын өзгерткендегі ұзарулары және тартқыштардың арқалық арқылы бір-біріне әсерлерінің салдарынан пайда болатын бойлық күштері туғызатын деформациялардың алгебралық қосындысы деп қарастырсақ:

$$\Delta l_1 = \alpha \Delta t l_1 - \frac{N_1 l_1}{EA}; \quad \Delta l_2 = \alpha \Delta t l_2 - \frac{N_2 l_2}{EA},$$

мұндағы

$$l_1 = h / \sin 30^\circ; \quad l_2 = h / \sin 60^\circ.$$

Енді Δl_1 , Δl_2 , l_1 , l_2 өрнектерін жүйенің деформациялық теңдеуіне енгізіп, h -қа қысқартсақ:

$$\frac{\alpha \Delta t}{\sin 30^\circ} - \frac{N_1}{EA \sin 30^\circ} = 1,155 \left(\frac{\alpha \Delta t}{\sin 60^\circ} - \frac{N_2}{EA \sin 60^\circ} \right),$$

немесе

$$\begin{aligned} 2N_1 - 1,334N_2 &= \alpha \Delta t EA (2 - 1,334) = \\ &= 125 \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 40 \cdot 10^{-4} \cdot 0,666 = 133200. \end{aligned}$$

Алынған теңдеуді жүйеге тұрғызылған тепе-теңдік теңдеуімен бірге шешейік

$$\begin{cases} 2N_1 - 1,334N_2 = 133200; \\ -N_1 + 0,866N_2 = 0. \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесінің шешімі

$$N_1 = 289827 \text{ Н} \approx 290 \text{ кН};$$

$$N_2 = 334673 \text{ Н} \approx 335 \text{ кН}.$$

Демек, тартқыштардағы кернеулердің шамасы

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{290 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-4}} = 72,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 72,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{335 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-4}} = 83,75 \cdot 10^6 \text{ Па} = 83,75 \text{ МПа}.$$

17.3. Монтаждық кернеу

Статикалық анықталмаған конструкциялардың, оның элементтерінің дәлдіксіз әзірленуінен туындайтын монтаждық кернеуін анықтаудың әдісін қарастырайық. Бұл әдісті келесі мысалдарды қарастырып тұжырымдайық.

17.5-мысал. Материалдары мен қима аудандары бірдей, үш стерженьнен жасалған конструкцияның ортаңғы стерженьнің ұзындығы жобадан Δ шамасына қысқа жасалынған делік (17.6, *a*-сурет). Конструкция тұйықталған жүйе болуы үшін, егер Δ стерженьдердің ұзындықтарына қарағанда әлдеқайда *кіші* шама болса, шеткі екі стерженьді сығып, ал ортадағысын созып, ұштарын бір нүктеге (*A* нүктесіне) жиып бекітуге болады (17.6, *c*-сурет). Монтаждау нәтижесінде жүйенің стерженьдерінде пайда болған монтаждық кернеуді анықтайық.

Шешуі: 1. *Есептің статикалық мағынасы.* Қию әдісін қолдана отырып, *A* нүктесінің тепе-теңдік күйін қарастырайық (17.6, *b*-сурет)

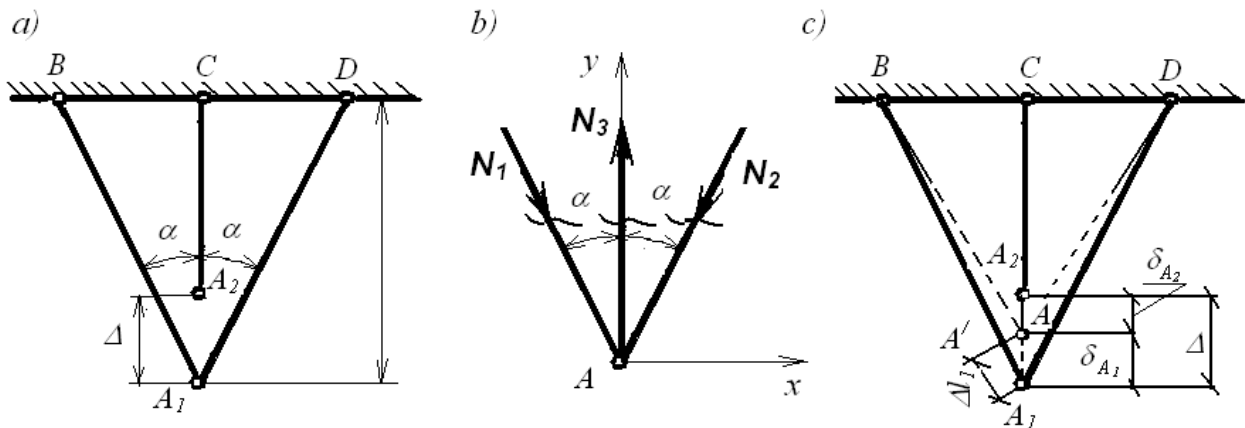
$$\sum F_x = 0; \quad N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0; \quad -N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha + N_3 = 0.$$

Бірінші теңдеу бойынша $N_1 = N_2$, ал екінші теңдеу екі белгісізі бар бір теңдеуге түрленеді

$$-2N_1 \cos \alpha + N_3 = 0,$$

демек, есеп бір рет статикалық анықталмаған.



17.6-сурет

2. *Есептің геометриялық мағынасы.* Монтаждаған жағдайда ортаңғы стерженьнің A_2 ұшы ұзару нәтижесінде A нүктесіне ауысады делік, сол сияқты, бүйірдегі стерженьдердің түйісу нүктесі A_1 де A нүктесіне ауысады. $\delta_{A_1} = AA_1$, $\delta_{A_2} = AA_2 = \Delta l_3$. Соның салдарынан конструкция тұйықталсын делік. Конструкция схемасынан бүйірдегі стерженьдердің деформациясын анықтау үшін циркульдің ашасымен, радиусы AB -ға тең шеңбер доғасын жүргізейік. Ол бірінші стерженьнің A_1B ұзындығынан A_1A' кесінді кеседі. Бұл кесінді бүйірдегі стерженьдердің қаншаға қысқарғанын көрсетеді $A_1A' = \Delta l_1 = \Delta l_2$. Материалдар кедергісінің негізгі жорамалдарына сәйкес, доға $\overset{\smile}{AA'}$ -ты A_1B -ге түсірілген перпендикулярмен алмастырайық, яғни $AA' \perp A_1B$ деп қарастырамыз. Сонда $\triangle AA_1A'$ -тан A_1 нүктесінің орын ауыстыру шамасы

$$\delta_{A_1} = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha}.$$

Стерженьдердің деформацияларының арасында 17.6, с-сурет бойынша мынадай байланыс орнатуға болады:

$$\Delta = \delta_{A_1} + \delta_{A_2} = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} + \Delta l_3$$

немесе

$$\Delta l_1 + \Delta l_3 \cos \alpha = \Delta \cos \alpha.$$

3. *Есептің физикалық мағынасы.* Гук заңы бойынша

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A}, \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A},$$

мұндағы $l_1 = \frac{l}{\cos \alpha}$, $l_3 = l$.

Орын ауыстыру теңдеуіне қоямыз

$$\frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A \cdot \cos \alpha} + \frac{N_3 \cdot l}{E \cdot A} \cdot \cos \alpha = \Delta \cos \alpha.$$

4. *Синтез.* Түрленген орын ауыстыру теңдеуінен N_1 -ді өрнектейік

$$N_1 = \frac{E \cdot A}{l} \left(\Delta - \frac{N_3 \cdot l}{E \cdot A} \right) \cdot \cos^2 \alpha.$$

Енді N_1 -ді статикалық теңдеуге енгізіп, белгісіз N_3 -ті анықтаймыз.

$$N_3 = \frac{2E \cdot A \cdot \Delta}{l} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)}.$$

Олай болса,

$$N_1 = N_2 = \frac{E \cdot A \cdot \Delta}{l} \left(1 - \frac{2 \cos^3 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \right) \cos^2 \alpha.$$

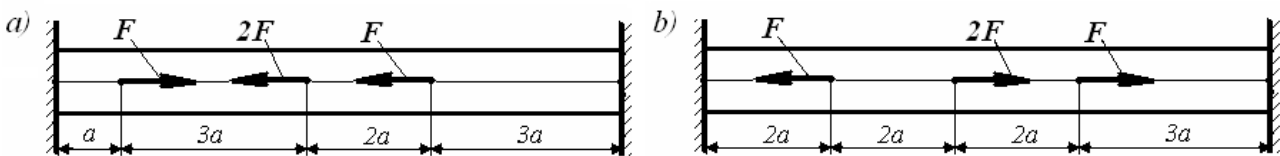
Стерженьдердегі монтаждық кернеулер

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N_1}{A} = \frac{E\Delta}{l} \left(1 - \frac{2 \cos^3 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \right) \cos^2 \alpha,$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{2E\Delta}{l} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)}.$$

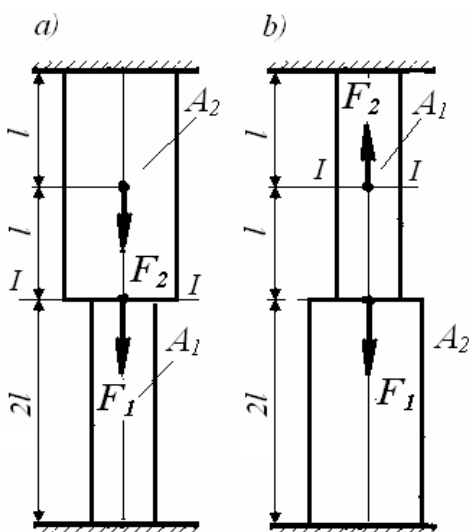
Жаттығу есептері

1-есеп. Екі ұшы қатаң бекітілген, материалы мен көлденең қимасының ауданы тұрақты білеудің тірек реакцияларын анықтаңыз (1-сурет).

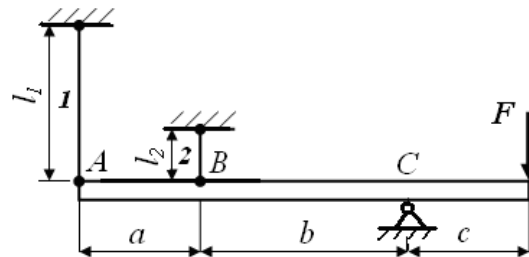


1-сурет

2-есеп. Берілген сатылы білеудің көлденең қимасының аудандарын және I-I қимасының орын ауыстыруын анықтаңыз (2-сурет). $l = 0,6 \text{ м}$, $F_1 = 10 \text{ кН}$, $F_2 = 8 \text{ кН}$, $A_2 = 2A_1$. Білеу материалының мүмкіндік кернеуі $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.



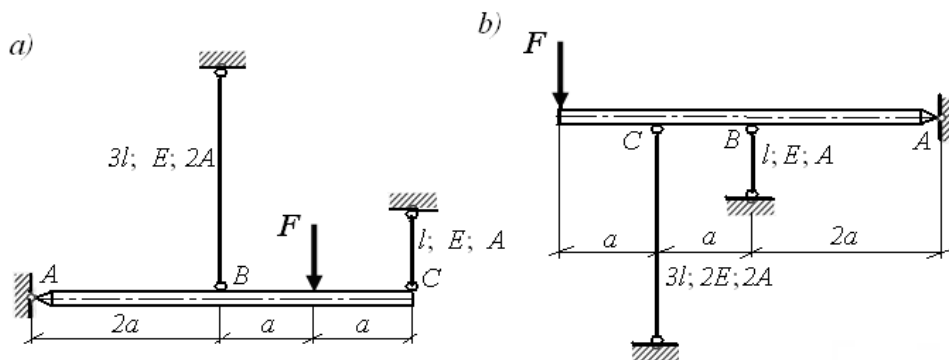
2-сурет



3-сурет

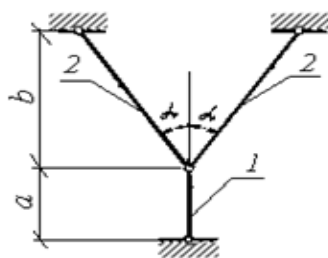
3-есеп. Топсалы жылжымайтын тіректе жатқан қатаң білеу 3-суретте көрсетілгендей болат тартқыштар арқылы қабырғаға бекітіліп, $F = 15 \text{ кН}$ күшпен жүктелген. $a = 1 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$, $c = 1,5 \text{ м}$, $A_1 = 5 \text{ см}^2$, $A_2 = 4 \text{ см}^2$, $\ell_1 = 1,5 \text{ м}$, $\ell_2 = 1 \text{ м}$. Мүмкіндік кернеуді $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ деп алып, тартқыштардың беріктігін тексеріңіз.

4-есеп. 4-суретте көрсетілген конструкцияның болат тартқыштары мен тіреулерінде туындайтын кернеулерді анықтаңыз. $F = 10 \text{ кН}$, $a = 1 \text{ м}$, $A = 5 \text{ см}^2$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\ell_1 = 0,8 \text{ м}$.

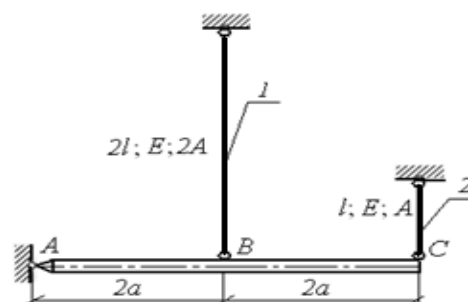


4-сурет

5-есеп. 5-суретте көрсетілген жүйені жинағаннан кейін болат стерженьдер 40° қыздырылса, стерженьдерде туындайтын кернеудің шамасы неге тең? $a = 0,8 \text{ м}$, $b = 1,2 \text{ м}$, $A = 6 \text{ см}^2$, $\alpha = 30^\circ$, $E_\sigma = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\alpha_\sigma = 125 \cdot 10^{-7}$.



5-сурет

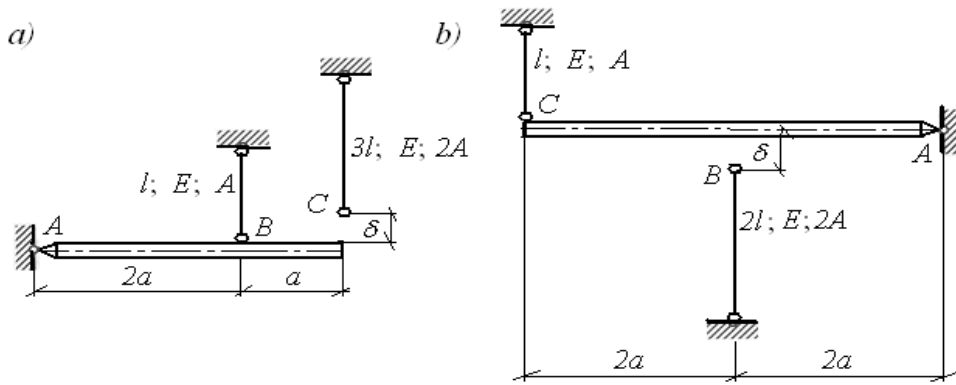


6-сурет

6-есеп. Бір ұшы топсалы жылжымайтын тірекпен бекітіліп, екі болат стерженьмен асылған (6-сурет). Жүйе жиналғаннан кейін 1 стерженьнің температурасы 50° көтерілген жағдайда стерженьдерде

туындайтын кернеулерді анықтаңыз. $a = 0,6\text{ м}$, $l = 0,8\text{ м}$, $A = 5\text{ см}^2$, $\alpha = 30^\circ$, $E_\sigma = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$, $\alpha_\sigma = 125 \cdot 10^{-7}$.

7-есеп. 7-суретте көрсетілген конструкцияның стерженьдеріндегі кернеуді анықтаңыз, $A = 8\text{ см}^2$, $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$, $a = 0,5\text{ м}$, $l = 0,6\text{ м}$, $\delta = 0,2\text{ мм}$.



7-сурет

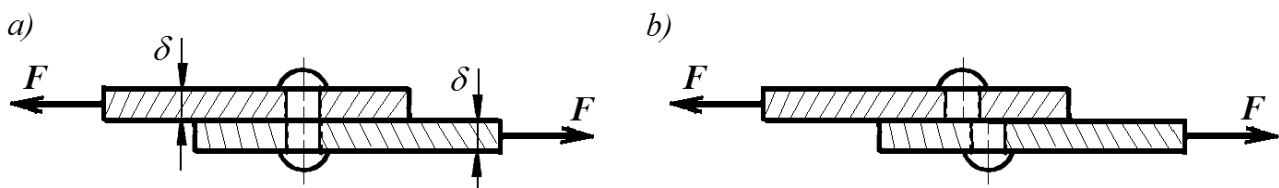
Қайталау сұрақтары:

1. Қандай есептер статикалық анықталмаған деп аталады?
2. Есептердің статикалық анықталмау дәрежесі қалай табылады?
3. Статикалық анықталмаған есептердің есептеу жолдарын айтып беріңіз.
4. Есептеудің статикалық мағынасы дегеніміз не?
5. Есептеудің геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.
6. Бірлесіп деформациялану теңдеулері дегеніміз не?
7. Есептеудің физикалық мағынасы туралы баяндаңыз.
8. Есептеудің синтез атты сатысында не қарастырылады?
9. Статикалық анықталмаған жүйелердің ерекшеліктері неде?

18-тарау. ЫҒЫСУ

18.1. Кесілу және ығысу ұғымдары. Ығысудағы деформациялар

Екі стерженьді бір-бірімен сұққыш арқылы байланыстырып, кейіннен, шамалары тең, бағыттары қарама-қарсы F екі күшпен жүктейік (18.1, *a*-сурет).



18.1-сурет

Сұққыш әсер етуші күштің белгілі бір мөлшерінде немесе сұққыш диаметрінің кішілігіне байланысты, стерженьдердің жанасу бетіне сәйкес жазықтықта қирауы мүмкін, яғни сұққыш кесіліп, екіге бөлінеді (18.1, *b*-сурет). Мұндай деформацияға ұшырайтын машина бөлшектері, мысалы, қосылыстарда қолданылатын тойтарма шегелер мен болттар, бұрамасұқпа, кілтек іс жүзінде жиі кездеседі.

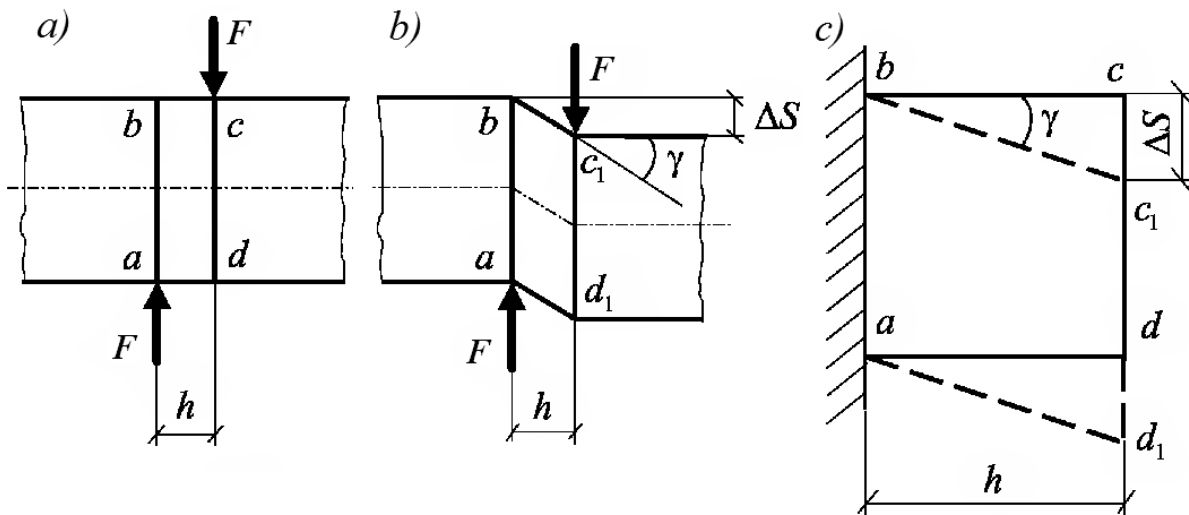
Машиналар мен механизмдердің қосылыс тетіктерінің бұлайша қирауын, яғни қосылыс тетіктерінің өздік бойлық өсіне перпендикуляр күш әсерінен қирауын **кесілу** деп атайды.

Осы жәйтті толығымен көрсету үшін, стерженьге шамалары тең және қарама-қарсы бағытталған екі күшті стержень өсіне перпендикуляр және бір-біріне өте жақын орналастырып түсірейік (18.2, *a*-сурет).

Осы күштердің әсерінен параллель көлденең екі қима бір-біріне қатысты жылжиды. Кесілуге дейінгі деформация нәтижесінде тікбұрыш қисаяды және оны **ығысу** деп атаймыз (18.2, *b*-сурет). Ығысу нәтижесінде көлденең қималардың бірі екіншісіне қарағанда, **ығысудың абсолют шамасы** деп аталатын Δs шамаға ығысады. Ол ұзындық өлшемімен өлшенеді.

Сондықтан да ығысу деформациясының дәрежесін тек ығысудың абсолют шамасының Δs күштердің арасындағы h қашықтыққа

қатынасы сипаттауы мүмкін $\frac{\Delta s}{h} = \operatorname{tg} \gamma$.



18.2-сурет

Деформацияның серпімді түрде өтуіне байланысты γ бұрышының шамасы өте аз, сондықтан

$$\operatorname{tg} \gamma = \gamma = \frac{\Delta s}{a} . \quad (18.1)$$

Сонымен, ығысу деформацияның мөлшері γ бұрышпен анықталады. Бұл бұрыш *салыстырмалы ығысу* немесе *ығысу бұрышы* деп аталады. Ығысу бұрышы тікбұрыштың өзгеруін сипаттайды ($abcd$ тікбұрыштың $abc'd'$ параллелограммына айналуы). γ радианмен өлшенеді. Кесілу ығысудың нәтижесі ретінде туындайды.

18.2. Ығысудағы кернеулер. Гук заңы

Ығысудағы кернеулерді анықтауға күш әдісін қолданамыз. Күштердің арасындағы қимада жанама кернеулердің τ тең әсерлігі болып табылатын, тек көлденең күш Q әсер етеді (18.3-сурет). Күштердің арасындағы қашықтық h өте кіші болғандықтан, июші момент әсерін ескермеуге болады.

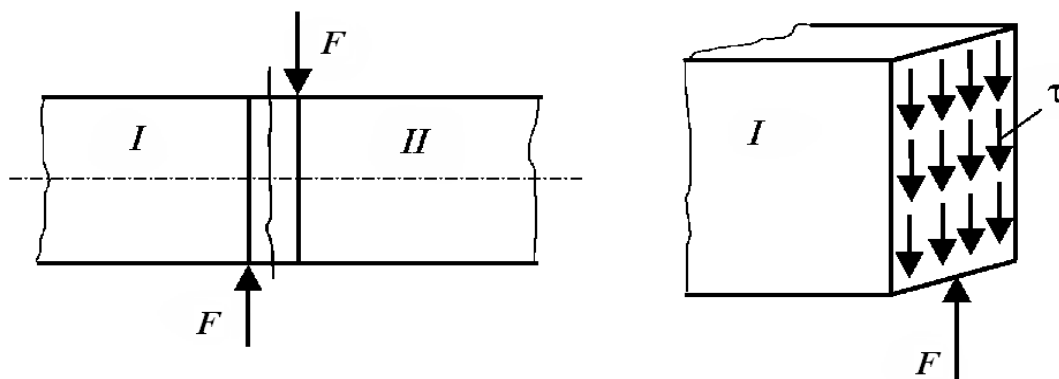
Сонымен, *ығысу* деп жүктелген дененің көлденең қимасында ішкі күш әсерлерінен тек жанама күш Q туындайтын деформацияны атаймыз.

Қию әдісі бойынша $Q = F$. Егер қима ауданындағы серпімді күштер бірдей таралған деп болжасақ, әсер етуші жанама

кернеулердің жиынтығы ығысу деформациясындағы ішкі күштің Q шамасын анықтайды, яғни

$$Q = \tau A,$$

мұндағы Q – көлденең күш; τ – жанама кернеу; A – қиманың ауданы.



18.3-сурет

Олай болса, жанама кернеудің шамасы келесі өрнекпен анықталады:

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (18.2)$$

Тәжірибе жүзінде ығысу деформациясы белгілі бір аралықта серпімді түрде өтіп, шамасы жанама кернеулерге пропорционал болатындығы көрсетіледі, яғни

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \text{ немесе } \tau = G\gamma. \quad (18.3)$$

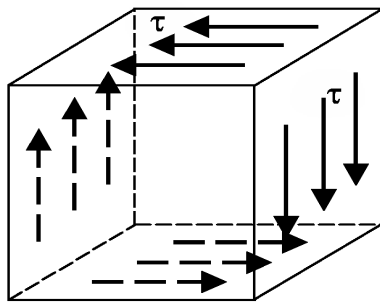
Бұл тұжырым **ығысу деформациясының Гук заңы** деп аталады.

Соңғы өрнектегі материалдардың серпімділік қасиеттерін сипаттайтын G коэффициентін **екінші текті серпімділік модулі** немесе **ығысу модулі** деп атайды, ал өлшем бірлігі кернеудікімен бірдей болады ($МПа$). Әрбір материалдардың E және G модульдерінің төмендігідей тәуелділігі бар:

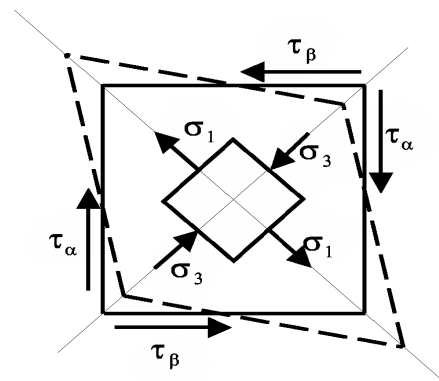
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (18.4)$$

Кейбір материалдардың ығысу модулі ($MПа$): ақ, сұр шойын – $4,5 \cdot 10^4$; көміртекті болат – $(8,0 \div 8,1) \cdot 10^4$; мыс – $4,0 \cdot 10^4$; жез – $(3,5 \div 3,7) \cdot 10^4$, алюминий – $(2,6 \div 2,7) \cdot 10^4$.

Стерженьге әсер ететін күштердің аралығынан элементті бөліп аламыз және тепе-теңдігін қарастырамыз. Элементтің тік және көлденең беттерінде жанама кернеулер әсер етеді (18.4-сурет). Сызба жазықтығына параллель беттерінде ешқандай кернеулер жоқ.



18.4-сурет



18.5-сурет

Элементтің беттерінде тек жанама кернеу туындайтын деформацияны **таза ығысу** деп атаймыз. Таза ығысуда нүкте жазық кернеулі күйде болады. Бұл жағдайда $\tau_\alpha = \tau$, $\tau_\beta = -\tau$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$.

Олай болса, бас кернеулер шамасы

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau,$$

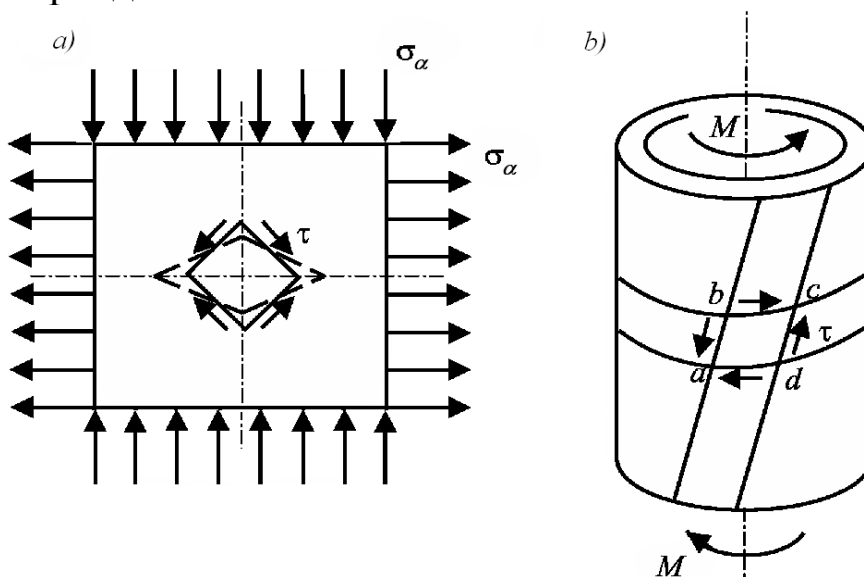
ал бас жазықтың орнын α бұрышы анықтайды

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta} = 1.$$

Мұнан таза ығысуда бас аудандардың элемент беттеріне 45° градуспен еңкіштенетінін көреміз (18.5-сурет).

Таза ығысу пластинаны бір бағытта созатын, ал екінші бағытта сығатын тік кернеулермен жүктегенде орын алады (18.6, *a*-сурет). 45° градус бұрышпен орналасқан аудандарда тек жанама кернеулер әсер етеді.

18.6, *a*-суретте көрсетілгендей, бірқалыпты таралған кернеуді түсіру өте қиын, сондықтан таза ығысу күйін цилиндрлік құбырды бұрау арқылы алуға болады (18.6, *b*-сурет). Екі құраушы және екі шеңберлі көлденең қимамен тұрғызылған *abcd* элементі құбырдың бір ұшын екінші ұшына қатысты шамалы бұрау нәтижесінде таза ығысуға ұшырайды.



18.6-сурет

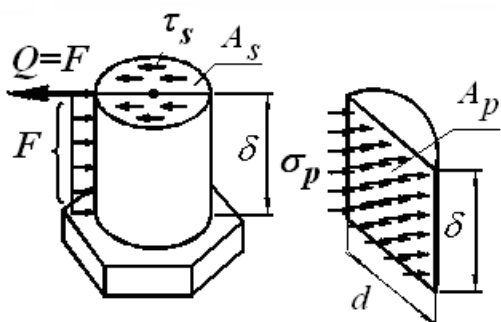
Таза ығысу деформациясының меншікті потенциялық энергиясы

$$U = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (18.5)$$

18.3. Ығысудың беріктікке есептеулері

Сұққыш кесілгенге дейін сыртқы күштер әсерінен екі көлденең қима ығыса деформацияланады. Сұққыштың ығыса деформациялануы оның A_s көлденең қималарында τ_s жанама кернеулердің әсер етуіне байланысты (18.7-сурет). Сонымен қатар стерженьдердің қысуынан сұққыштың бойлық диаметрлік қимасында A_p жаншылу кернеуі деп аталатын σ_p тік кернеу туындайды. Бұл кернеудің

шамасы өте үлкен болуы мүмкін, соның салдарынан стерженьнің немесе сұққыштың материалы пластикалық деформацияланады және стерженьдегі тесіктер сопақтанады.



18.7-сурет

Сонымен, сұққышқа τ_s жанама кернеу мен σ_p тік кернеу әсер етеді, яғни сұққыш күрделі кернеулі күйде болады. Іс жүзінде мұндай күйді теориялық зерттеу мүмкін емес. Сонымен қатар жобалау және құрастырудың әрбір қадамында тойтармаларды, бұрандамалар, кілтектерді, пісірілген жіктерді және т.б. есептеулерімен кездесеміз.

Тойтармаларды, бұрандамаларды, кілтектерді, пісірілген жіктерді және т.б. қосу элементтерін кесілуге есептеу үшін құрылымға әсер ететін сыртқы күш қосу элементтеріне бірдей таралады деп қарастырылады. Кесілудің беріктік шарты келесі түрде жазылады:

$$\tau = \frac{F}{A_s} \leq [\tau_s], \quad (18.6)$$

мұндағы A_s – кесілу қимасының ауданы; $[\tau_s]$ – кесілу мүмкіндік кернеуі.

Кесілу қимасының ауданы былайша есептеледі:

$$A_s = An_s n,$$

Мұндағы $A = \frac{\pi d^2}{4}$ – бұрандаманың немесе тойтарманың есептік ауданы; d – тойтарманың диаметрі немесе бұрандаманың сыртқы диаметрі; n_s – бір бұрандаманың немесе тойтарманың кесілу саны; n – қосылыстағы бұрандаманың немесе тойтарманың саны.

Бұл өрнекті түрлендіру арқылы беріктік есептеуінің үш формуласын аламыз:

$$1) A_s = \frac{F}{[\tau_s]} \text{— жобалау есептеуі;}$$

2) $\tau = \frac{F}{A_s} \leq [\tau_s]$ – тексеру есептеуі;

3) $F_{max} = A_s \cdot [\tau_s]$ – жүк көтергі есептеуі.

Тойтармалы және бұрандамалы қосылыстар кесілуге есептелумен қатар, олардың қосылатын элементтері мен тойтарма шегелердің жанасу беттері жаншылуға есептеледі. Жаншылудың беріктік шарты келесі түрде жазылады:

$$\sigma_p = \frac{F}{A_p} \leq [\sigma_p], \quad (18.7)$$

мұндағы $A_p = d \sum t \cdot n$ – жаншылу қимасының ауданы; d – бұрандаманың немесе тойтарманың диаметрі; n – олардың саны; $\sum t$ – бір бағытта жаншылатын элементтердің қалыңдықтарының қосындысының аз шамасы; $[\sigma_p]$ – жаншылу мүмкіндік кернеуі.

Кесілудің беріктік шегі созылу беріктік шегінің 0,5...0,8 бөлігінде болады. Осы тәуелділік мүмкіндік кернеуді тағайындауда да сақталады

$$[\tau_s] = (0,5 \dots 0,8)[\sigma_t],$$

мұндағы $[\sigma_t]$ – созылу мүмкіндік кернеуі.

Мысалы, болат үшін $[\tau_s] = (0,7 \dots 0,8)[\sigma_t]$ тәуелділігі пайдаланылады.

Тәжірибе жүзінде анықталатын жаншылу мүмкіндік кернеуі шамамен

$$[\sigma_p] = (2,0 \dots 2,5)[\sigma_c],$$

мұндағы $[\sigma_c]$ – сығылу мүмкіндік кернеуі.

Қорыта айтқанда, тойтармалы және бұрандамалы қосылыстар кесілуге есептеуі келесі тұжырымдамаларға негізделген:

1. Тойтарма мен бұрандаманың көлденең қимасында тек бір ішкі күш әсері – көлденең күш Q туындайды.

2. Қосылыстың бекіту элементінің көлденең қимасында туындайтын жанама кернеу оның ауданында бірқалыпты таралған.

3. Егер қосылыс бірдей бекітпе элементтермен жасалған болса, онда олар бірдей жүктелген деп қарастырылады.

4. Жаншылуға есептегенде нақты жаншылу бетінің ауданы емес, ал оның диаметрлік жазықтыққа қимасы ескеріледі ($A_p = \delta \cdot d$).

18.4. Есептерді шешудің әдістемесі

18.1-мысал. Суретте көрсетілген тойтармалы қосылыстың беріктігін тексеіңіз (18.8-сурет), мүмкіндік кернеулері $[\sigma_t] = 160 \text{ МПа}$; $[\tau_s] = 100 \text{ МПа}$; $[\sigma_p] = 320 \text{ МПа}$; $\delta = 10 \text{ мм}$; $b = 150 \text{ мм}$; $\delta_1 = 6 \text{ мм}$; $F = 125 \text{ кН}$; $d = 20 \text{ мм}$.

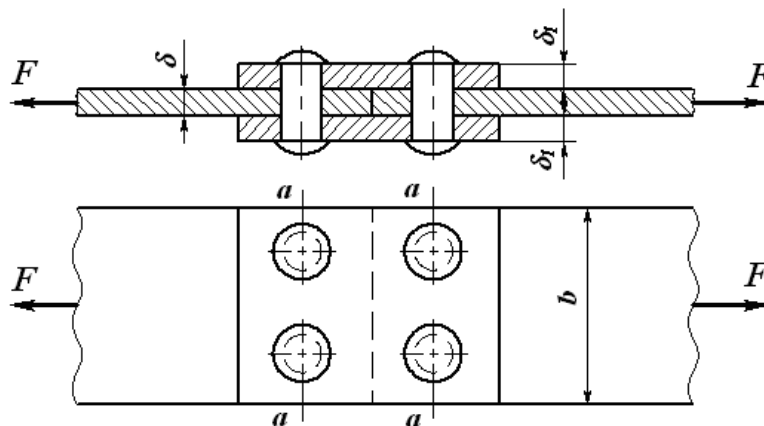
Шешуі: Қосылу табақтарының $a-a$ қауіпті қимасындағы кернеуді анықтау үшін алдымен осы қиманың ауданын есептейміз.

$$A_p = b\delta - 2d\delta = 15 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 11 \text{ см}^2 = 11 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$\sigma = \frac{F}{A_p} = \frac{125 \cdot 10^{-3}}{11 \cdot 10^{-4}} = 113,6 \text{ МПа} < [\sigma_t]$$

Тойтармалардың екі жазықтықта кесілетінін ескере отырып, олардың кесілуге беріктігін тексереміз.

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{125 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2 \frac{3,14 \cdot 0,02^2}{4}} = 99,5 \text{ МПа} < [\tau_s]$$



18.8-сурет

Қос бастырманың қалыңдығы $2\delta_1$ қосылу табақтарының қалыңдығына δ үлкен болғандықтан, табақтардың арасындағы тойтармалардың бөлігін жаншылу деформациясына беріктілікке тексереміз. Сондықтан жаншылу ауданы

$$A_p = d\delta = 2 \cdot 1 = 2 \text{ см}^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Жаншылу ауданындағы кернеу

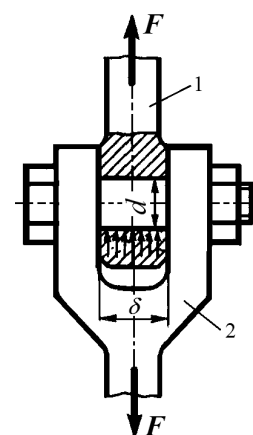
$$\sigma_p = \frac{F}{iA_p} = \frac{125 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 312,5 \text{ МПа} < [\sigma_p]$$

Демек, үш беріктік шартының орындалуына байланысты, қосылыстың беріктігі қамтамасыз етілген.

18.2-мысал. Тартқыш пен аша саңылаусыз орнатылған бұрандамамен қосылған (18.9-сурет). Күш $F = 48 \text{ кН}$, бұрандама диаметрі $d = 20 \text{ мм}$, ал тартқыш төбесінің қалыңдығы $\delta = 24 \text{ мм}$ болғандағы тартқыш төбесінде туындайтын жаншылу кернеуін анықтаңыз.

Шешуі: Шартты жаншылу бетінің ауданын есептейміз:

$$A_p = d \cdot \delta = 20 \cdot 24 = 480 \text{ мм}^2.$$



18.9-сурет

Тартқыш төбесінде туындайтын жаншылу кернеуін анықтаймыз:

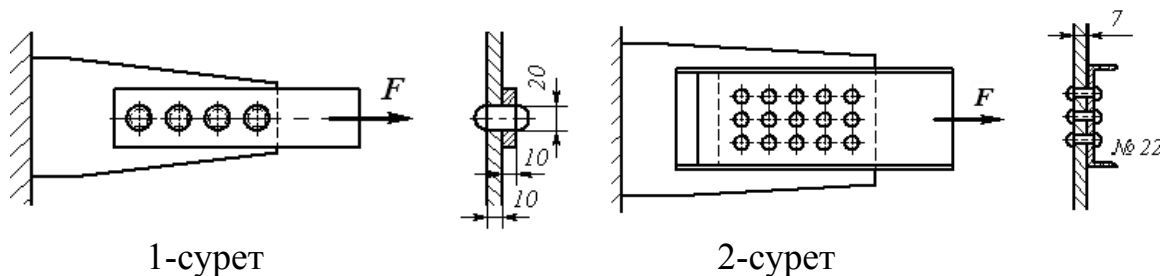
$$\sigma_p = \frac{F}{A_p} = \frac{40 \cdot 10^3}{480 \cdot 10^{-6}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа}.$$

Жаттығу есептері

1-есеп. Егер $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau_s] = 140 \text{ МПа}$, $[\sigma_p] = 280 \text{ МПа}$, $F = 230 \text{ кН}$ болса, тойтарма қосылыстың беріктігі қандай (1-сурет)?

2-есеп. Егер $[\tau_s] = 140 \text{ МПа}$, $[\sigma_p] = 320 \text{ МПа}$, $F = 260 \text{ кН}$ болса, тойтарма қосылысқа диаметрі $d = 14 \text{ мм}$ тойтарманың нешеуі қажет (2-сурет)?

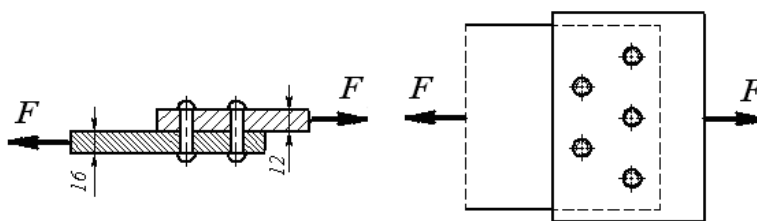
Тойтармалардың анықталған саны бойынша τ_s мен σ_p -ды анықтаңыз.



1-сурет

2-сурет

3-есеп. Беріктік шарттарынан тойтарма қосылысқа әсер ететін мүмкіндік күшті табу керек. Мүмкіндік кернеулер: 1 жолақ үшін $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, 2 жолақ үшін $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$; $[\tau_s] = 140 \text{ МПа}$, (3-сурет).



3-сурет

Қайталау сұрақтары:

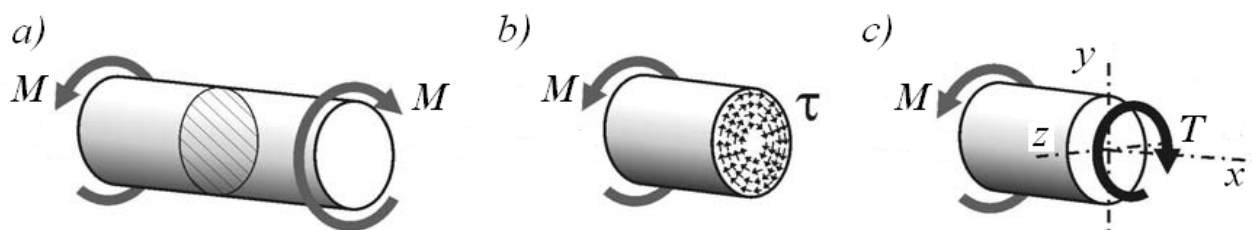
1. Кесілу деген не және ол қандай күш әсерінен пайда болады?
2. Ығысу деформациясы қандай қосылыстарда болады?
3. Ығысу деформациясында кернеу қалай анықталады?
4. Ығысу модулі материалдың қандай қасиетін сипаттайды?
5. Материалдың үш серпімді тұрақты шамаларының арасында қандай заңдылық бар?
6. Материалдардың созылу және ығысу беріктік шектерінде қандай байланыстылық бар?
7. Тойтармалы қосылыста жолақ табақтың өлшемдері мен тойтарма сандары қалай анықталады?

19-тарау. БҰРАЛУ

19.1. Негізгі түсініктер

Бұралу деп сыртқы күштердің әсерінен стерженьнің кез келген көлденең қимасында тек **бұраушы моменті** туындайтын деформация түрін айтамыз. Бұралып жұмыс істейтін стерженьді **білік** деп атау қалыптасқан. Бұраушы момент T әрпімен белгіленеді.

Дөңгелек стерженьді қарастырып (19.1, *a*-сурет), оның екі ұшына әсер ету жазықтықтары стерженьнің өсіне перпендикуляр, моменттері M болатын, қарама-қарсы бағытталған екі қос күшпен жүктейік. Қию әдісін пайдалана отырып, стерженьнің көлденең қимасына тек **бұраушы момент** әсер ететіне көз жеткізуге болады (19.1, *c*-сурет), яғни стержень **бұралу күйде** деген сөз.

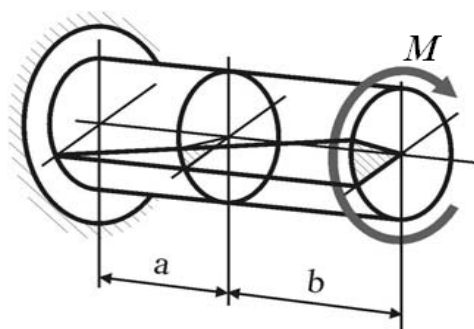


19.1-сурет

Бұралу деформациясы іс жүзінде өте жиі кездеседі. Мысалы, машиналардың жетекші дөңгелектері отырғызылған өстерде, беріліс қорабындағы біліктерде, кардан біліктерінде, трансмиссиялық біліктерде т.б.

Осы бөлімде қарастырылатын бұралу теориясы стерженьнің көлденең қимасында пайда болатын ішкі күштердің моменттері, яғни бұраушы момент қандай да бір шамасынан артық болмайды деп және стерженьде туындайтын деформациялар тек серпімді, яғни стержень Гук заңына тәуелді деформацияланады деген тұжырымға негізделген. Олай болса, серпімділік шегіндегі стерженьнің бұралу теориясын мынадай болжамдарда негіздеуге болады:

– деформацияға дейінгі жазық бір-біріне параллель қималар деформациядан кейін де жазық, бір-біріне параллель және арақашықтықтары өзгермеген күйінде қалады (жазық қималар гипотезасы) (19.2-сурет);



19.2-сурет

– стерженьнің түзу өсі түзу қалпында қалады және барлық көлденең қималары осы өстің төңірегінде бір-біріне қарағанда **бұралу бұрышы** деп аталатын қандай да бір φ бұрышқа бұрылады;

– деформацияға дейінгі түзу сызықты қима диаметрі деформациядан кейін де түзу сызықты күйін сақтайды.

19.2. Көлденең қимасы дөңгелек білеудің бұралуы

Бұралу деформациясын зерттеу біліктердің көлденең қималарындағы бұраушы моменттерді анықтап, олардың эпюрлерін тұрғызудан басталады. Ол үшін бізге белгілідей, қию әдісі қолданылады.

Қарастырылушы біліктің қандай да бір қималарындағы бұраушы моментін табу үшін сол қима арқылы оны ойша екіге бөлеміз де, бір бөлігін алып тастаймыз (19.1, *b*-сурет). Алынып тасталған бөліктің қалған бөлікке әсерін бұраушы моментпен алмастырамыз. Қалған бөлік сыртқы айналдырушы момент пен қимадағы бұраушы моменттің әсерінен тепе-теңдік күйде болады, яғни $T = M$. Егер қалған бөлікке бірнеше айналдырушы момент әрекет ететін болса, онда жоғарғыдай тұжырымдай отырып, мынаған көз жеткізуге болады: *кез келген қимадағы бұраушы момент қиманың бір жағында жатқан сыртқы айналдырушы моменттердің алгебралық қосындысына тең.*

Біліктің қарастырылатын бөлігіне түсірілген сыртқы қос күштердің моменттері, білік бөлігіне қима жағынан қарағанда, сағат тілі жүрісіне қарсы бағытталған болса, бұраушы момент **оң таңбалы**, ал кері жағдайда **теріс таңбалы** деп есептеледі. Таңбалар туралы ережелер шартты түрде қабылданған, өйткені біліктерді беріктікке немесе қатандыққа есептегенде, бұраушы моменттердің таңбалары ескерілмей, ең үлкен абсолют шамасы ғана ескеріледі.

Бұраушы момент эпюрасын тұрғызуда келесі мысалды қарастырып, түсініктеме берейік (19.3, *a*-сурет). Екі подшипникке

тірелген білік төрт шкив арқылы M_1, M_2, M_3, M_4 айналдырушы моменттерді орындаушы механизмдерге береді. Осы берілген біліктің бұраушы моменттерінің эпюрасын тұрғызыңыз. $M_1 = 12 \text{ кНм}$, $M_2 = 11 \text{ кНм}$, $M_3 = 2 \text{ кНм}$, $M_4 = 3 \text{ кНм}$.

Ол үшін алдымен есептеу схемасын тұрғызайық. Берілген білік үш аралықтан тұрады. Аралықтардағы бұраушы моменттерді қию әдісі бойынша анықтаймыз (19.3, *b*-сурет).

Бірінші аралық үшін $0 \leq x_1 \leq l_1$:

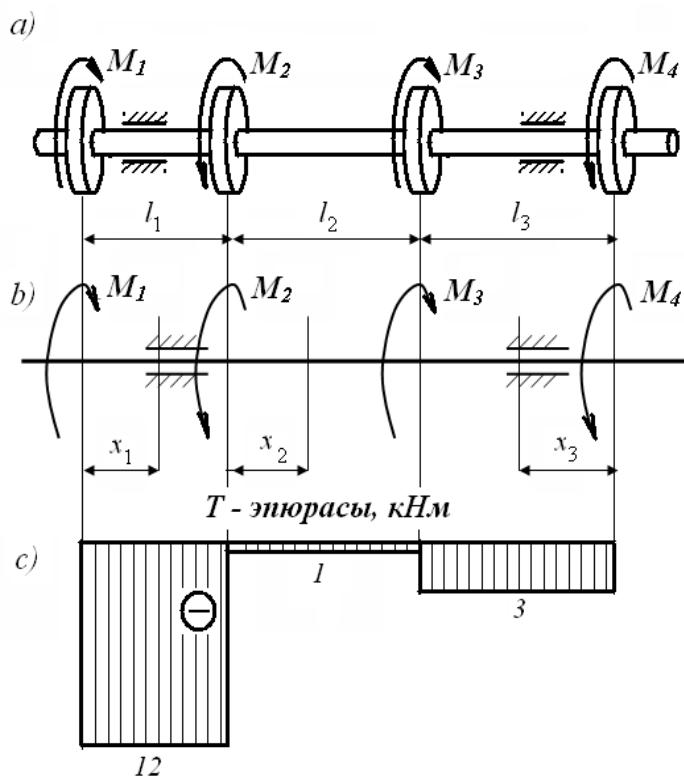
$$T_1 = -M_1 = -12 \text{ кНм}.$$

Екінші аралық үшін $0 \leq x_2 \leq l_2$:

$$T_2 = -M_1 + M_2 = -12 + 11 = -1 \text{ кНм}.$$

Үшінші аралық үшін $0 \leq x_3 \leq l_3$:

$$T_3 = -M_1 + M_2 - M_3 = -12 + 11 - 2 = -3 \text{ кНм}.$$



19.3-сурет

Анықталған мәндер бойынша бұраушы моменттің эпюрасын тұрғызсақ, ол 19.3, *c*-сурет түрінде кескінделеді.

Іс жүзінде біліктен берілетін сыртқы айналдыру моментінің қуаты N (*вт* не *квт*, не ат күші) мен бұрыштық жылдамдығы ω (*рад/сек*) немесе біліктің айналу саны n (*айн/мин*) беріледі, бұл жағдайда айналдыру моментінің шамасы төмендегі формулалардың бірімен анықталады:

a) егер N қуаттың бірлігі *вт*, ал бұрыштық жылдамдық ω бірлігі *рад/сек* болса

$$M = \frac{N}{\omega}, \quad (19.1)$$

өлшем бірлігі $H \cdot m$;

b) егер N қуаттың бірлігі *ак* (ат күші), ал бірліктің айналу саны n – *айн/мин* болса

$$M = 7162 \frac{N}{n}, \quad (19.2)$$

өлшем бірлігі $H \cdot m$;

c) егер N қуаттың бірлігі *квт*, ал біліктің айналу саны n – *айн/мин* болса

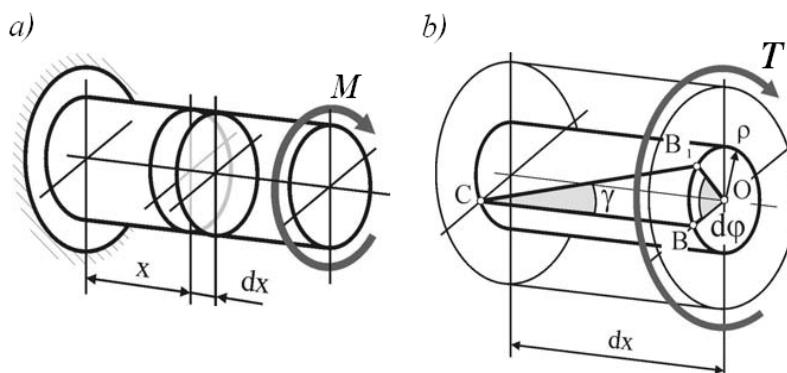
$$M = 9736 \frac{N}{n}, \quad (19.3)$$

өлшем бірлігі Hm .

19.3. Кернеу мен деформация

Біліктің деформациялы күйін зерттеу үшін, жоғарыда қарастырылған стерженьнің (19.4, *a*-сурет) қатаң тірегінен x қашықтықтан ені dx элементті (цилиндр) бөліп алып, оны жеке үлкейтіп сызайық (19.4, *b*-сурет).

Егер бөліп алынған элементтің сол жақтағы қимасы қандай да бір φ бұрышқа бұрылды десек, онда оның оң жақтағы қимасы $\varphi + d\varphi$ бұрышқа бұрылады. $d\varphi = \angle BOB_1$ бұрышы қарастырылып отырған элементтің бұралу бұрышы деп аталады.



19.4-сурет

Цилиндрлі элементтің екі бетінің бір-біріне қарағанда бұралуының салдарынан CB жасаушысы CB_1 орнына ауысады.

Ығысудағыдай бұралуда да деформация өлшемі болып ығысу бұрышы алынады.

$$\gamma = \frac{BB_1}{CB}.$$

Жоғарғы суреттен

$$BB_1 = \gamma \cdot dx; \quad BB_1 = \rho \cdot d\varphi,$$

екенін көреміз, онда

$$\gamma = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dx}. \quad (19.4)$$

Егерде біз радиусы ρ тең элементар цилиндрден радиусы r стерженьді қарастырсақ, онда

$$\gamma = \frac{r \cdot d\varphi}{dx}$$

болары ақиқат.

Осы жәйттен мынаны тұжырымдауға болады: берілген біліктің ығысу бұрышы қарастырылатын цилиндрлік беттердің радиустарына пропорционал болады және біліктің сыртқы бетінің γ бұрышы ең үлкен γ_{\max} мәніне ие болады. Сонымен,

$$\frac{\gamma}{\gamma_{\max}} = \frac{\rho}{r}.$$

Ығысу деформациясының Гук заңын бұралған цилиндрге сол қалпында пайдаланып, (19.4) формуланы былайша жазайық:

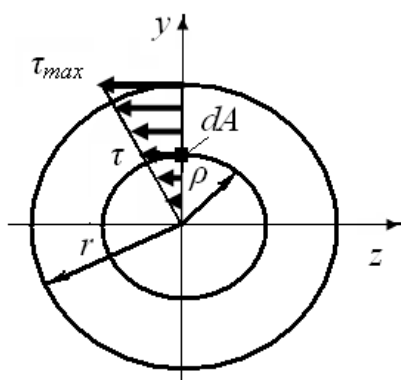
$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

онда

$$\frac{\tau}{\tau_{max}} = \frac{\rho}{r},$$

яғни бұралғанда біліктің көлденең қимасындағы жанама кернеу бірқалыпты тарамайды: олар қиманың ауырлық ортасына дейінгі ұзындыққа пропорционал, басқаша айтқанда, жанама кернеу радиус бойымен түзу сызықтық заңдылықпен өзгереді (19.5-сурет).

Бұралған цилиндрдің өсінде кернеу нөлге тең де, оның сыртқы бетінде ең үлкен мәніне ие болады.



19.5-сурет

Әрбір нүктенің жанама кернеуінің бағыты сәйкес радиустарға перпендикуляр болады, өйткені қарастырылған қимадағы элементтер шеңбердің жанамасының бағытында ығысады. Енді кернеудің таралу заңдылығын анықтағаннан кейін оның шамасын да білуге болады.

Біліктің осінен ρ қашықтықтағы элементар dA ауданына әсер ететін жанама τdA күштің моменті $dT = \rho \cdot \tau dA$. Алынған өрнекті қима ауданы бойынша интегралдасак,

$$T = \int_A \rho \cdot \tau dA = \frac{\tau}{\rho} \int_A \rho^2 dA.$$

Мұндағы $\int_A \rho^2 dA = I_\rho$ – қиманың өрістік екпін моменті, олай болса:

$$T = \frac{I_\rho \cdot \tau}{\rho}.$$

Бұдан бұралған біліктің көлденең қимасының кез келген нүктесіндегі кернеуді анықтайтын өрнекті аламыз:

$$\tau = \frac{T}{I_{\rho}} \cdot \rho. \quad (19.5)$$

Көптеген бұралу есептеулерінде қимадағы ең үлкен жанама кернеуді қарастыруға тура келеді, яғни бұралған цилиндрдің сыртқы бетіндегі кернеу. $\rho = r$ болғанда, жанама кернеу ең үлкен мәніне ие болады

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_{\rho}} \cdot r. \quad (19.6)$$

Егер $\frac{I_{\rho}}{r} = W_{\rho}$ – өрістік кедергі моменті екенін еске алсақ, онда

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_{\rho}}. \quad (19.7)$$

Сонымен, біліктің кез келген қимасындағы ең үлкен кернеу қимадағы бұраушы момент пен қиманың өрістік кедергі моментінің қатынасына тең.

Ұзындығы ℓ стерженьнің бұралу деформациясын анықтау үшін алдымен (19.4) формуласын былайша жазайық:

$$d\varphi = \frac{\gamma \cdot dx}{\rho} = \frac{\tau \cdot dx}{G\rho} = \frac{\tau_{max} \cdot dx}{Gr},$$

мұнан кейін біліктің ұзындығы бойынша интеграл алайық:

$$\varphi = \int_0^{\ell} \frac{\tau_{max} \cdot dx}{Gr} = \frac{\tau_{max} \ell}{Gr}.$$

(19.7) формуласына сәйкес τ_{max} мәнін қойып, ұзындығы ℓ біліктің толық бұралу бұрышын анықтайтын өрнекті аламыз:

$$\varphi = \frac{T\ell}{GI_{\rho}}. \quad (19.8)$$

19.4. Білікті беріктік пен қатандыққа есептеу

Бұралған білік үшін **беріктік шарты** келесі түрде жазылады:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_{\rho}} \leq [\tau] \quad (19.9)$$

мұндағы T_{max} – біліктің қауіпті қимасындағы ең үлкен бұраушы момент; $[\tau]$ – бұралудың мүмкіндік кернеуі, ол пластикалық материалдар үшін ығысудың мүмкіндік кернеуі сияқты алынуы мүмкін.

Бұралудың (19.9) беріктік шарты бойынша қарастырылатын үш түрлі есептеудің формуласын келтірейік:

$$1) W_{\rho} \geq \frac{T_{max}}{[\tau]}; \quad 2) \tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_{\rho}} \leq [\tau]; \quad 3) T_{max} \geq W_{\rho} [\tau].$$

Жоғарыда айтылғандай, алынған беріктік формулалары тек бүтін және қуыс дөңгелек біліктер үшін жарамды. Олар көлденең қимасы басқы пішінді біліктерді есептеуге пайдалануға жарамсыз.

Кейбір жағдайларда, дөңгелек біліктерге жеткілікті беріктікті талап етумен қатар, қосымша, белгілі бір қатандық шартты орындау да талап етіледі, яғни толық жүктеумен жұмыс істейтін біліктің бұралу бұрышы алдын ала берілген бір шамадан аспауы керек. Есептеудің мұндай түрін қатандыққа есептеу дейді.

Бұралу деформациясының **қатандық шарты**

$$\theta_{max} = \frac{T_{max}}{G \cdot I_{\rho}} \leq [\theta], \quad (19.10)$$

мұндағы θ_{max} – қауіпті қимадағы салыстырмалы бұралу бұрышы; $[\theta]$ – мүмкіндік салыстырмалы бұралу бұрышы.

Қажетті жағдайда (19.10) формуласынан, жоғарыда көрсетілгендей, бұралуда қарастырылатын үш есептеудің сәйкес формулаларын алуға болады.

19.5. Есептерді шешудің әдістемесі

19.2-мысал. Болат тұтас дөңгелек білік минутына $n = 240$ айналым жасай отырып, $N = 60$ квт қуат береді. Беріктік пен қатаңдық шарттарынан біліктің қимасының d диаметрін табыңыз. Мүмкіндік жанама кернеуі $[\tau] = 40$ МПа, мүмкіндік салыстырмалы бұралу бұрышы $[\theta] = 1$ град / м, ығысу модулі $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа деп алынады.

Шешуі: Білікті айналдырушы моменттің шамасын (19.1) формуламен анықтаймыз:

$$T = 9738 \frac{N}{n} = 9738 \frac{60}{240} = 2434,5 \text{ Нм.}$$

Біліктің диаметрін табайық.

a) беріктік шарты бойынша

$$d = \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{2434,5}{0,2 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 6,7 \cdot 10^{-2} \text{ м;}$$

b) қатандық шарты бойынша

$$d = \sqrt[4]{\frac{T}{0,1 \cdot G \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{2434,5 \cdot 180}{0,1 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 3,14}} = 6,5 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Анықталған диаметрлердің ең үлкенін қажетті диаметр деп қабылдаймыз.

$$d = 6,7 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 68 \text{ мм.}$$

19.3-мысал. Беріктік пен қатаңдыққа есептеген, бұралған тұтас білікке бірдей диаметр d беретін бұраушы T моментті анықтаңыз. Мүмкіндік жанама кернеу $[\tau] = 80$ МПа, 1 метр ұзындықтың мүм-

кіндік салыстырма бұралу бұрышы $[\theta] = 0,5^\circ$, біліктің материалының ығысу модулі $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Шешуі: Берілген мүмкіндік салыстырмалы бұралу бұрышының атау бірлігін *рад/метр*ге ауыстырайық:

$$[\theta] = \frac{0,5\pi}{180} = \frac{\pi}{360} \text{ рад/м.}$$

Беріктік (19.9) және қатаңдық (19.10) шарттарынан біліктің қимасындағы бұраушы моментті өрнектейміз:

$$T \geq [\tau] \cdot W_\rho = [\tau] \cdot 0,2d^3; \quad T \geq [\theta] \cdot GI_\rho = [\theta] \cdot G \cdot 0,1d^4.$$

Есептің шартын ескере отырып, екі өрнекті теңестірсек,

$$d = \frac{2[\tau]}{G[\theta]} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot 360}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10}} = 0,23 \text{ м.}$$

Олай болса, жоғарыда келтірілген өрнектердің бірінен қажетті бұраушы моментті анықтауға болады, мысалы

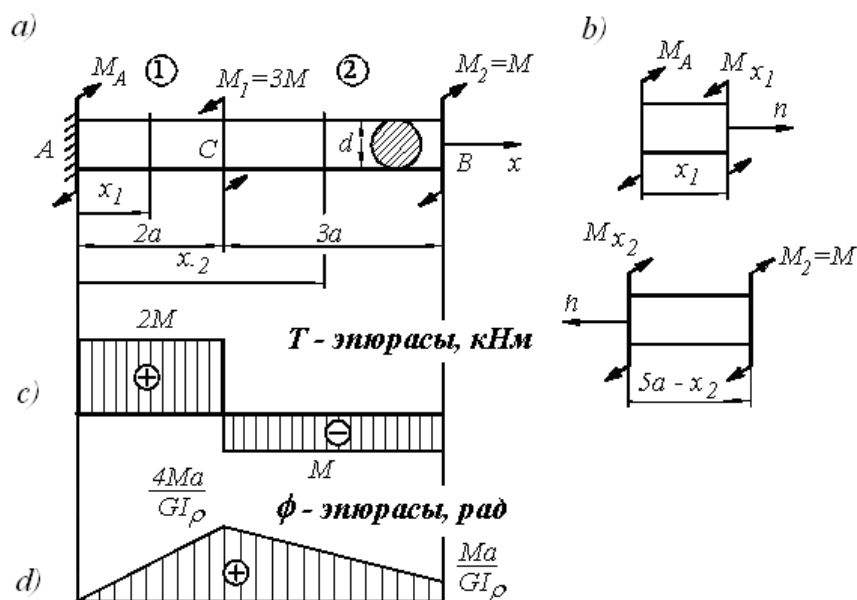
$$T = 80 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 0,23^3 = 195 \text{ кНм.}$$

19.4-мысал. Болат біліктің (19.7-сурет) бұралу моменттерінің, бұралу бұрышының эпюраларын тұрғызыңыз және беріктік шартын түзеңіз. Біліктің d диаметрінің мүмкіндік шамасын анықтаңыз. $M = 3 \text{ кНм}$, $[\tau] = 80 \text{ МПа}$, $a = 1 \text{ м}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Шешуі: 1. *Тепе-теңдік шартынан тіректің реактивті моментін анықтау.* 19.7, *a*-суреттен

$$\sum M_x = 0; \quad -M_A + M_1 - M_2 = 0,$$

$$M_A = M_1 - M_2 = 3M - M = 2M.$$



19.7-сурет

2. Қию әдісімен ішкі бұралу моменттерін анықтау. Біліктің ішкі бұралу моментінің өрнектері әртүрлі екі аралығы бар. Қию әдісімен (19.7, b-сурет)

$$T_1 = M_A = 2M, \quad T_2 = -M_2 = -M$$

бұралу моментін анықтаймыз және оның эпюрасын тұрғызамыз (19.7, c-сурет).

Аралықтардың түйіске қимасына сыртқы қадалған $M_1 = 3M$ моменті әсер етеді. Сондықтан бұралу моментінің осы қимасында сыртқы қадалған моменттің шамасына тең секіртпе бар. Д.Журавскийдің дифференциалдық тәуелдігіне сәйкес $\frac{dM_x}{dx} = -m = 0$, олай болса, тұрғызылған эпюраға сәйкес келетіндей, $M_x = const$ (19.7, c-сурет).

3. Беріктікке есептеу. Бұралу моменттерінің эпюрасынан оң жақтағы бөлігінің барлық қимасында $T_{max} = 2M = 6 \text{ кНм}$ екенін анықтаймыз.

Бұралған біліктің беріктік шарты

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_\rho} = \frac{2M}{W_\rho} \leq [\tau].$$

Біліктің қимасы дөңгелек болғандықтан,

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3,$$

онда беріктік шартынан

$$d = \sqrt[3]{\frac{T_{max}}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0721 \text{ м} = 7,21 \text{ см}.$$

Анықталған шаманы бүтінге дейін жуықтаймыз және $d = 7 \text{ см}$ қабылдаймыз. Мұнан кейін қиманың өрістік екпін моментін және қимадағы ең үлкен жанама кернеуді есептейміз, нәтижесінде

$$W_{\rho} = 0,2d^3 = 0,2 \cdot 7^3 = 68,6 \text{ см}^3 = 6,86 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3,$$

$$\tau_{max} = \frac{6 \cdot 10^3}{6,86 \cdot 10^{-5}} = 87,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 87,4 \text{ МПа}.$$

Білік $\frac{87,4}{80} = 1,09$ есе, яғни 11% артық жүктелген. Егер диаметрді

$d = 8 \text{ см}$ деп алсақ, онда $W_{\rho} = 100,5 \text{ см}^3$, $\tau_{max} = 59,7 \text{ МПа}$ болады. Онда біліктің кернеулі күйі мүмкіндік кернеулерден 25,4% кем. Нәтижесінде біліктің есептемелік диаметрін $d = 8 \text{ см}$ деп қабылдаймыз.

4. *Бұралу бұрыштарының эпюраларын тұрғызу.* Бұралу бұрышының эпюрасын тұрғызу үшін, ең алдымен әр аралықтардың шеткі қималарының бір-біріне қарағандағы бұралу бұрышын (19.8) формула бойынша анықтаймыз:

$$\varphi_1 = \varphi_{C-A} = \frac{2M \cdot 2a}{GI_{\rho}} = \frac{4Ma}{GI_{\rho}};$$

$$\varphi_2 = \varphi_{C-B} = -\frac{M \cdot 3a}{GI_{\rho}} = -\frac{3Ma}{GI_{\rho}}.$$

Сан мәндерін қойсақ:

$$\varphi_{C-A} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 2,0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 100,5 \cdot 10^{-6}} = 1,493 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{B-C} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 3,0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 100,5 \cdot 10^{-6}} = -1,119 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Енді бұралу бұрыштарының эпюраларын тұрғызамыз. Оны қатаң тіректің A қимасына қатысты тұрғызамыз, яғни $\varphi_A = 0$. B қимасына φ_{C-A} мәнін тұрғызамыз

$$\varphi_{C-A} = 1,493 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

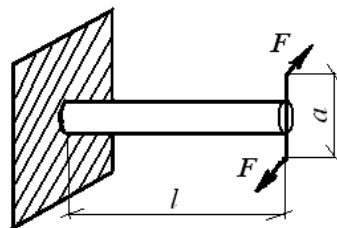
Ал CB қимасының A қимасына қарағандағы бұралу бұрышы φ_{C-A} мен φ_{B-C} бұралу бұрыштарының қосындысынан тұрады:

$$\varphi_{B-A} = \varphi_{C-A} + \varphi_{B-C} = 1,493 \cdot 10^{-3} - 1,119 \cdot 10^{-3} = 0,374 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

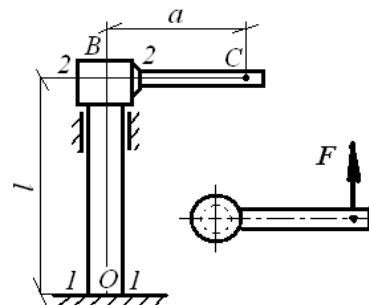
Анықталған шамалар бойынша бұралу бұрыштарының эпюраларын тұрғызамыз (19.7, d -сурет).

Жаттығу есептері

1-есеп. Егер $F = 1000 \text{ Н}$, иіні $a = 50 \text{ см}$, біліктің ұзындығы $l = 80 \text{ см}$, ал диаметрі $d = 5 \text{ см}$ болса, 1-суретте көрсетілген біліктің бос ұшы қандай бұрышқа бұрылатынын анықтаңыз.



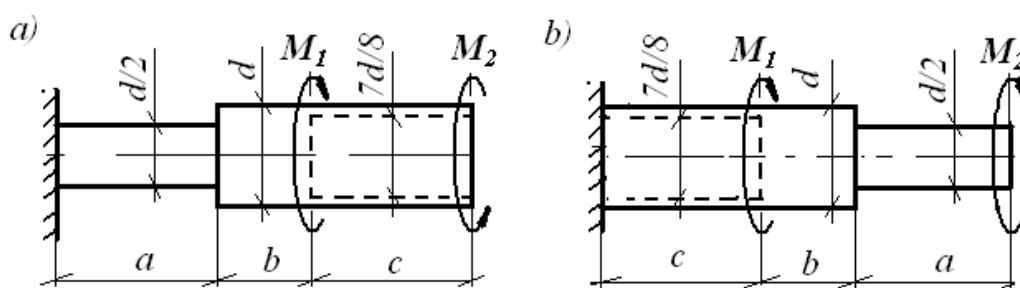
1-сурет



2-сурет

2-есеп. Буынды *ОВС* білігінің *ВС* иініне $F = 100\text{ Н}$ күш түсірілген (2-сурет). Біліктің ең үлкен жанама кернеуін және диаметрі $d = 8\text{ мм}$ ұзындығы $l = 25\text{ мм}$ *ОВ* иінінің бұралу бұрышын анықтаңыз. F күшінің a иіні 20 мм , ығысу модулі $G = 8 \cdot 10^4\text{ МПа}$.

3-есеп. Көлденең қимасы айнымалы болат білік сыртқы моменттері M_1 және M_2 екі қос күшпен жүктелген (3-сурет). Беріктік және қатандық шарттарынан біліктің d диаметрін анықтаңыз. Қауіпті қимадағы жанама кернеудің эпюрасын тұрғызыңыз. $M_1 = 10\text{ кНм}$, $M_2 = 15\text{ кНм}$, $a = 0,8\text{ м}$, $b = 0,5\text{ м}$, $c = 1,2\text{ м}$, $G = 8 \cdot 10^4\text{ МПа}$, $\tau_{pr} = 100\text{ МПа}$, $[\theta] = 0,01\text{ рад/м}$, $[n] = 1,6$.



3-сурет

Қайталау сұрақтары:

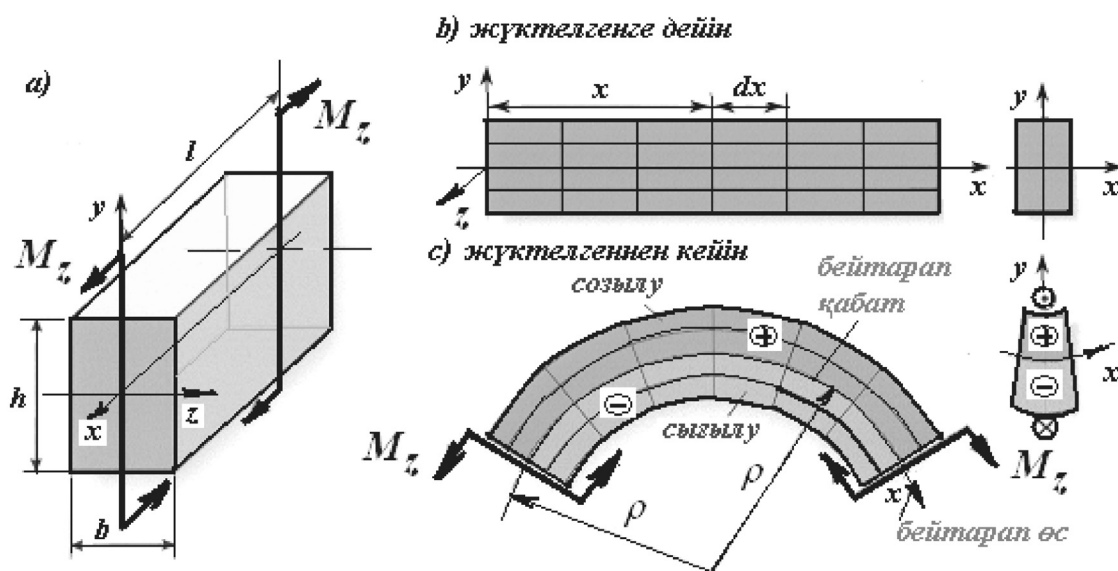
1. Деформацияның қандай түрі бұралу деп аталады?
2. Бұралу моментінің таңбасы қалай анықталады?
3. Толық және салыстырмалы бұралу бұрыштары деген не?
4. Түзу дөңгелек қималы білеудің бұралуында қолданылатын болжамдар қандай?
6. Дөңгелек және сақина пішінді қиманың өрістік екпін моментінің формуласын келтіріңіз және өлшем бірліктері қандай?
7. Дөңгелек және сақина пішінді қиманың өрістік кедергі моментінің формуласын келтіріңіз және өлшем бірліктері қандай?
8. Бұралғанда білеудің сақиналы қимасы дөңгелек қимаға карағанда не себепті тиімді?
9. Бұралған түзу біліктің көлденең қимасында қандай күш пайда болады және оның таңбасының ережесі қандай?

10. Бұралған түзу біліктің көлденең қимасының кез келген нүктесінде қандай кернеу пайда болады?
11. Бұралған біліктің қатандығы дегеніміз не?
12. Ығысу модулі материалдың қандай қасиетін сипаттайды?
13. Бұралу бұрышы мен бұралу моменттері қандай тәуелділікте?
14. Материалдың үш серпімді тұрақты шамаларының арасында қандай заңдылық бар?
15. Берілген нүктеден өтетін қандай жазықтықта экстремалды тік кернеу пайда болады және ол неге тең? Бұл жазықтықтар қалай аталады?
16. Бұралған жұмыр біліктің ең үлкен кернеуі неге тең және олар қиманың қандай нүктелерінде пайда болады?
17. Бұралуға есептеуде мүмкіндік кернеу қалай анықталады?
18. Бұралған стержень үшін беріктік шартын жазыңыз.
19. Бұралған стержень үшін қатандық шартын жазыңыз.

20-тарау. ЖАЗЫҚ ИІЛУ

20.1. Иілу деформациясы. Арқалық

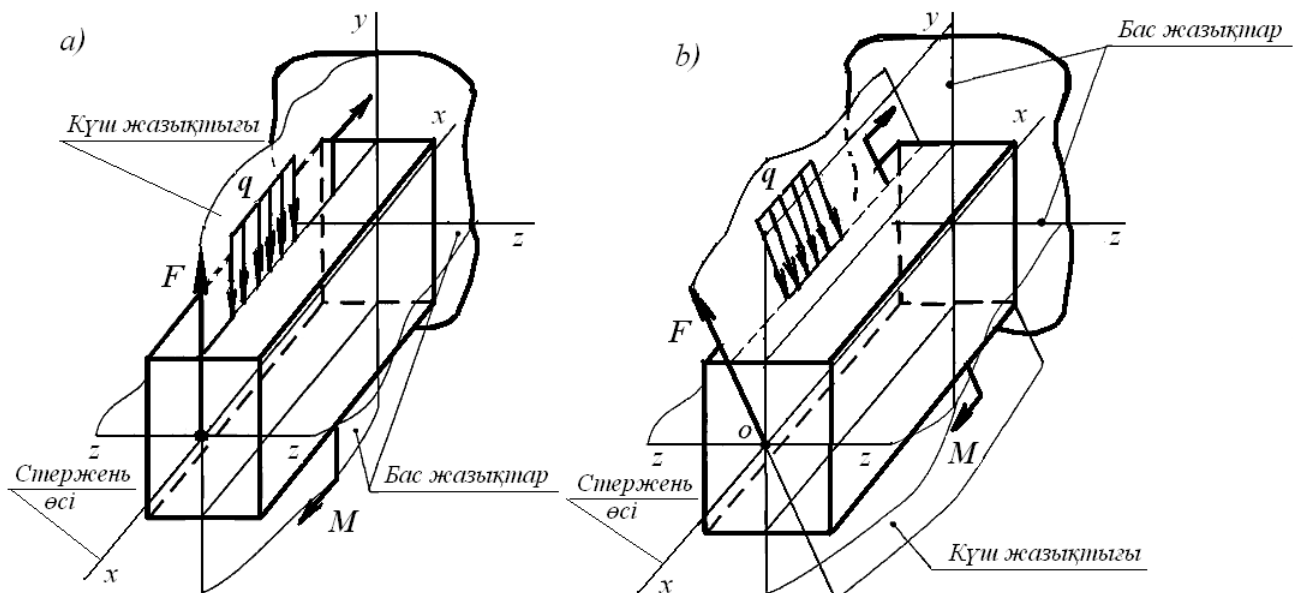
Егерде 20.1, *a, b*-суретте көрсетілген стерженьнің екі ұшына өс жазықтығында жататын шама жағынан тең, бағыттары қарама-қарсы екі қос күшпен жүктеген жағдайда, стерженьде туындайтын деформацияны (20.1, *c*-сурет) *иілу* деп атаймыз. Иілуге тән сипат – ол стержень өсінің қисықтығының өзгеруі, мысалы, өсі түзу сызықты стерженьді игенде, оның өсі қисық сызықты пішін алады.



20.1-сурет

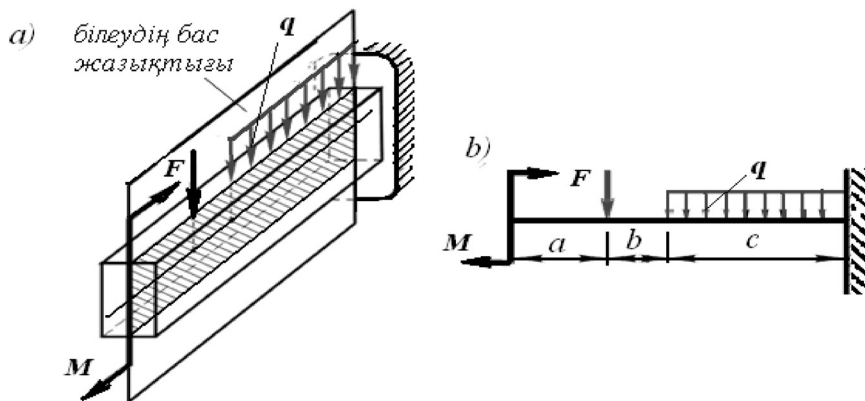
Иілу деформациясы стерженьге тек қос күш әсер еткенде ғана емес, көптеген жағдайда көлденең күш әсерінен де болады. Сыртқы күш әсер ететін жазықтықты *күш жазықтығы* деп, ал стерженьнің бойлық өсі мен көлденең қимасының бас екпін өстері арқылы өтетін жазықтықтарды *бас жазықтықтар* деп атаймыз.

Күш жазықтығының бас жазықтықтарға қатысты орналасуына байланысты, иілу *жазық иілу* және *қиғаш иілу* деп екіге бөлінеді. Егер күш жазықтығы бас жазықтықтардың бірінде жатса, иілу – *жазық иілу* (20.2, *a*-сурет), ал егер күш жазықтығы басқа кез келген өс жазықтықтарында жатса, *қиғаш иілу* деп аталады (20.2, *b*-сурет).



20.2-сурет

Бұл жерде мынаған көңіл аударған жөн: жазық иілуде стерженьнің өсі деформацияға дейін қандай жазықтықта жатса, деформациядан кейін де сол жазықтықта жатады, ал қиғаш иілуде өстің иілу жазықтығы бастапқы жазықтыққа сәйкес келмейді.



20.3-сурет

Егер күш жазықтығы бас жазықтардан тыс басқа жазықтықта жатса, онда оны өзара перпендикуляр бас жазықтықтарға проекциялап, иілуді әрбір жазықтықтағы жазық иілуге келтіруге болады.

Иіліп деформацияланатын өсі түзу сызықты стерженьдер арқалық деп аталады.

Арқалықты есептеу сұлбасында оның өсімен алмастыру қабылданған. Бұл жағдайда барлық күш арқалықтың өсіне түсірілуі керек, ал күш жазықтығы сұлба жазықтығымен беттесуге тиіс.

20.3, *a*-суреттегі арқалықтың есептеу сұлбасы 20.3, *b*-суреттегідей болады.

Арқалықты жүктеу үшін оны кем дегенде екі нүктеде тірекке бекіту немесе сүйеу қажет. Конструкциясына байланысты арқалықтың тірегін үш түрге жіктеуге болады: жылжымалы топсалы тірек, жылжымайтын топсалы тірек және қатаң бекітпе.

Барлық жағдайда осы тіректерде пайда болатын реакция күштері мен моменттерді анықтау үшін, статикалық тепе-теңдік күйін сипаттайтын теңдеулер пайдаланылады:

$$\sum M = 0, \sum X = 0, \sum Y = 0. \quad (20.1)$$

Белгісіз реакциялары статиканың үш теңдеуінен анықталатын арқалықтар – статикалық анықталған, ал белгісіз реакцияларын анықтауға статиканың теңдеулері жеткіліксіз арқалықтар статикалық анықталмаған жүйелерге жатады. Статикалық анықталмаған арқалықтарды есептегенде, бұл курста қарастырылмайтын өзгеше тәсілдер қолданылады.

20.2. Июші моменттер мен көлденең күштер

Арқалыққа түсірілген жүктемелер бойынша тірек реакцияларын анықтағаннан кейін, арқалыққа әсер етуші сыртқы күштердің шамалары белгілі болады. Иілген арқалық материалының кернеулі күйін зерттеу үшін алдымен оның әрбір қимасы қандай күштердің әсеріне ұшырайтынын білу қажет.

Жазық иілуде барлық сыртқы күштер xOy жазықтығында жатады да, z өсіндегі проекциясы және x пен y өстеріне қатысты моменті нөлге тең болады. Сонымен қатар арқалықтың түзу өсіне перпендикуляр күштердің де x өсіндегі проекциясы нөлге тең болады. Осыған орай арқалықтың әрбір қимасында нөлден ерекше екі шама қалады: сыртқы күштердің y өсіндегі проекцияларының қосындысы – **көлденең күш** Q және z өсіне қатысты моменттердің қосындысы – **ию моменті** M .

Демек, жалпы жағдайда сыртқы күштердің әсерінен иілген арқалықтың кез келген қимасында ішкі күштерден тек көлденең күш пен ию моменті пайда болады.

Жүктелген арқалықтың көлденең қимасында туындайтын ішкі күштердің түрімен, әсер ету жазықтығының орналасуына байланысты иілу деформациясын былайша сұрыптауға болады.

Егер июші момент көлденең қимадағы жалғыз ғана ішкі күш болса, онда иілу *таза иілу* деп аталады.

Иілу, егер көлденең қимада июші моментпен қатар көлденең күш пайда болса, *көлденең иілу* деп аталады.

Кез келген қималардағы көлденең күштер Q мен ию моменттері M қию әдісі бойынша анықталады. *Көлденең күш* шамасы көлденең қиманың бір жағына әсер етуші сыртқы күштердің қима жазықтығындағы проекцияларының алгебралық қосындысына тең. *Июші момент* шамасы көлденең қиманың бір жағында әсер етуші сыртқы күштердің осы қиманың ауырлық центріне қатысты моменттерінің алгебралық қосындысына тең.

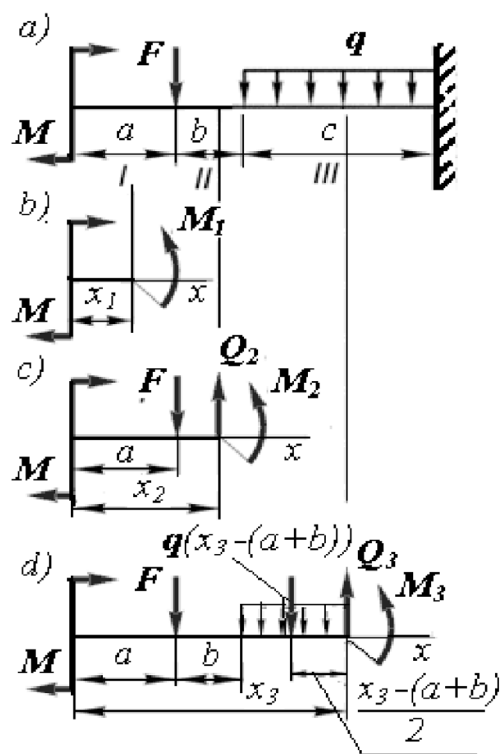
20.4, *a*-суретте келтірілген арқалықты қарастырып, оның көлденең қималарындағы ішкі күштерін анықтайық. Сыртқы күштердің түсу нүктелеріне сәйкес арқалықты үш аралыққа бөлейік: *I*, *II*, *III*. Алдымен *I* аралықты сыртқы моменттің түсу нүктесінен x_1 арақашықтықта көлденең қимамен қиып, оның оң жағындағы арқалықтың бөлігін алып тастап, сол жағындағы бөлігінің тепе-теңдігін қарастырамыз (20.4, *b*-сурет).

I аралық: $0 \leq x_1 \leq a$.

$$Q_I = 0, \quad M_I = M.$$

Мұнан бұл аралықтың таза иілу күйінде болатынын аңғарамыз.

Енді *II* аралықты арқалықтың сол ұшынан x_2 арақашықтықта жататын көлденең қимамен кесейік. Тағы да қиманың оң жағындағы арқалықтың бөлігін алып тастап, оның сол бөлігін қарастырып, қимадағы ішкі күштерді құралық: $a \leq x_2 \leq a + b$.



20.4-сурет

$$Q_{II} = -F, \quad M_{II} = M - F(x_2 - a).$$

Мұндағы $F(x_2 - a)$ моментінің әсер ету бағыты M моментінің бағытына қарама-қарсы, сондықтан оны теріс таңбамен алдық. Бұл аралықтың көлденең қималарында көлденең күш пен ию моменті пайда болады. Осы жәйт аралықтың көлденең иілу күйде болатындығын тұжырымдайды. Бұл аралықтағы көлденең күш тұрақты болса, ию моменті сызықтық заңмен өзгереді.

III аралықты арқалықтың сол ұшынан x_3 арақашықтықта жататын көлденең қимамен кесіп, жоғарыда қарастырғандай, қиманың оң жағындағы арқалықтың бөлігін алып тастап, оның сол бөлігін қарастырып, қимадағы ішкі күштерді анықтайық (20.4, d -сурет).

III аралық: $a + b \leq x_3 \leq a + b + c$.

$$Q_{III} = -F - q(x_3 - (a + b)),$$

$$M_{III} = M - F(x_3 - a) - q(x_3 - (a + b)) \frac{(x_3 - (a + b))}{2},$$

немесе

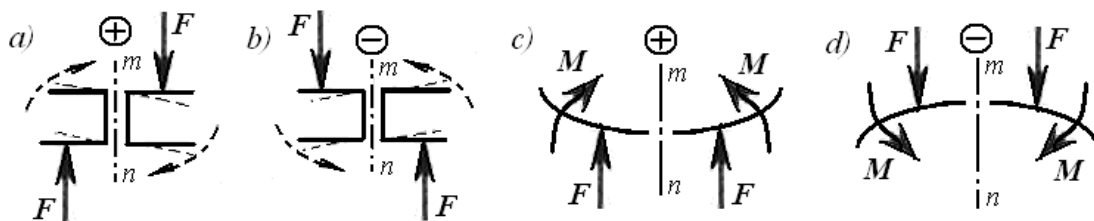
$$M_{III} = M - F(x_3 - a) - q \frac{(x_3 - (a + b))^2}{2}.$$

Бұл аралықта да көлденең иілу туындайды. Бірқалыпты таралған жүктеменің әсеріне байланысты көлденең күш сызықтық заңмен өзгереді, x_3 -ке тәуелді ию моменті параболалық заңмен өзгереді.

Көлденең күштер мен июші моменттерге төмендегідей таңбалар ережесі шартты түрде қабылданған: егер қиманың сол жағынан әсер ететін сыртқы күштер – төменнен жоғары қарай, ал оң жағында жоғарыдан төмен қарай бағытталса, ол қимадағы көлденең күш – **оң таңбалы** (20.5, a -сурет), керісінше жағдайда **теріс таңбалы** (20.5, b -сурет) болады. Бұл ереже былай да оқылады: арқалықтың қалдырылған бөлігі сыртқы күш әсерінен қимаға қарағанда сағат тілінің жүрісі бағытында бұрылуға ұмтылса, көлденең күш – **оң таңбалы** деп, егер сағат тілі жүрісіне кері бағытта бұрылуға ұмтылса, **теріс таңбалы** деп есептеледі.

Егер аралықтың өсі сыртқы күштердің моменттерінің әсерінен қиманың ауырлық центріне қатысты дөңесте төмен қарай иілсе (20.5,

c-сурет), ол қимадағы ию моменті – **оң таңбалы** деп, ал керісінше жағдайда (20.5, *d*-сурет) **теріс таңбалы** деп есептеледі.



20.5-сурет

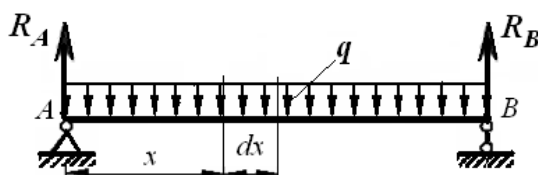
Ию моменті мен көлденең күштің бойлық өс бойымен өзгеру заңдылығын көрсететін графиктерді *M* және *Q* *эпюралары* деп атайды.

20.3. *M*, *Q* және *q* араларындағы дифференциалдық байланыстар

Ию моменті, көлденең күш және бірқалыпты таралған жүктеменің қарқындылығы, төменде көрсетілгендей, өзара дифференциалдық байланыстарда болады:

$$\frac{dM}{dx} = Q; \quad \frac{dQ}{dx} = -q. \quad (20.2)$$

Бұл байланыстардың шын мәнінде орын алатындығын көрсету үшін 20.6-суреттегі арқалықты қарастырып, арқалықтың сол жағындағы тіректен *x* қашықтықтағы көлденең қимада туындайтын ішкі күштердің өрнегін тұрғызайық:



20.6-сурет

$$M(x) = R_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}, \quad Q(x) = R_A - q \cdot x.$$

Енді осы қиманы арқалықтың өсі бойымен шексіз аз *dx* шамасына жылжытайық, яғни алғашқы қимадан шексіз аз ара-

қашықтықтағы екінші қиманы қарастырайық. Бұл қимадағы ішкі күштердің шамасы:

$$M(x + dx) = R_A \cdot (x + dx) - \frac{q \cdot (x + dx)^2}{2},$$

$$Q(x + dx) = R_A - q \cdot (x + dx).$$

Жанама күштің өсімшесін анықтайық:

$$dQ = Q(x + dx) - Q(x) = R_A - q \cdot (x + dx) - R_A + q \cdot x = -q \cdot dx,$$

бұдан

$$q = -\frac{dQ}{dx}$$

екенін көреміз.

Енді ию моментінің өсімшесін анықтайық:

$$dM = M(x + dx) - M(x) = R_A \cdot (x + dx) - \frac{q \cdot (x + dx)^2}{2} - R_A \cdot x + \frac{q \cdot x^2}{2}.$$

бұдан

$$dM = R_A \cdot dx - q \cdot x dx = (R_A - q \cdot x) \cdot dx = Q \cdot dx$$

немесе

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

Сонымен, мынаны тұжырымдауға болады: *бірқалыпты таралған жүктеменің қарқындылығы қимадағы көлденең күш өрнегінің x бойынша алынған теріс таңбалы бірінші туындысына тең; осы қимадағы көлденең күш қимадағы ию моменті өрнегінің x бойынша алынған бірінші туындысына тең.*

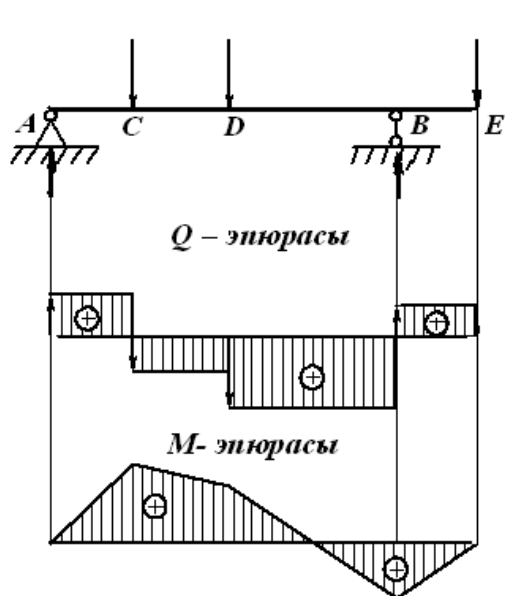
Арқалыққа түсірілетін кез келген жүктеме үшін (20.2) өрнегі әділетті.

Қию әдісі мен осы (20.2) дифференциалдық байланыстардан туындайтын көлденең күштер мен июші моменттердің эпюраларын тұрғызу және тексеру ережелері төмендегідей:

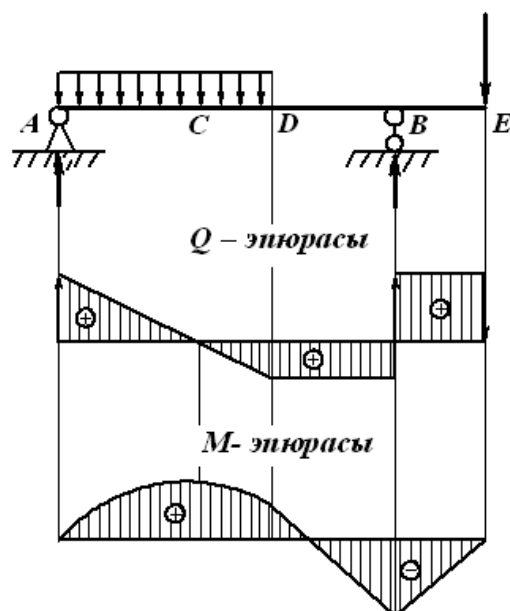
1) таралған күштер әсер етпеген аралықтардың Q эпюралары нөлдік сызыққа (база) параллель, ал M эпюралары жалпы жағдайда көлбеу түзулермен шектеледі (20.7-сурет);

2) таралған күштер әсер ететін аралықтардың Q эпюралары көлбеу түзумен, ал M эпюрасы квадрат парабодалармен шектеледі (20.8-сурет);

3) көлдең күш нөлге тең болатын қимада июші момент экстремаль мәнге (не өте үлкен, не өте кіші) ие болады (20.8-сурет);



20.7-сурет



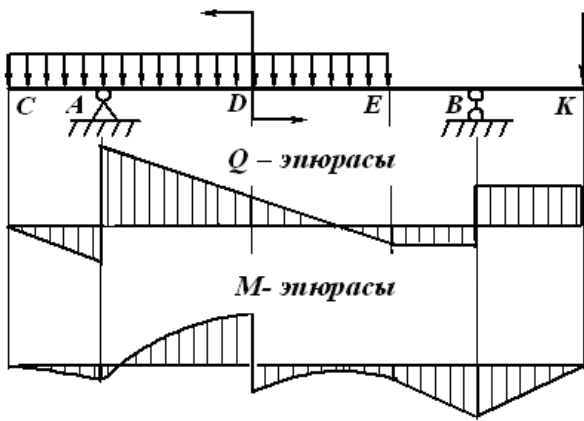
20.8-сурет

4) $Q > 0$ аралықтарда M өседі, яғни солдан оңға қарай M эпюраларының оң ординаттары өседі де, терістері кемиді (20.7, 20.8-суреттердегі AC және BE аралықтары); егер $Q < 0$ болса, онда M кемиді (20.7, 20.8-суреттерінде CD және DB аралықтары);

5) аралықтың сыртқы қадалған күштер әсер ететін қималарында:

a) Q эпюрасы кілт өзгереді және шамалары қадалған күштердің мәндеріне тең (20.7-суреттегі C, D, B қималары);

b) M эпюрасы сынады, яғни іргелес аралықтардың эпюрлерінде баяу жанасу болмайды (20.7-суретте C, D, B қималары);



20.9-сурет

б) сыртқы моменттер әсер ететін аралықтың қималарында M эпюрасы кілт өзгереді және өзгеру шамалары моменттердің мәндеріне тең болады, ал Q эпюрасында өзгеріс болмайды (20.9-суреттегі D қимасы).

7) арқалықтың ұштарындағы қималардағы көлденең күш пен июші момент сол қималарға түсірілген сыртқы (активті не

реактивті) күшке және қос күштің моменттеріне (активті не реактивті) сәйкес тең болады;

8) таралған күш басталатын не аяқталатын қималарда (бұл қималарға басқа күш түспеген жағдайда) июші моменттердің эпюрасында күрт майыспайды, яғни бұл нүктелерде парабодалар мен түзулердің ортақ жанамалары болады.

M эпюрасының квадраттық парабодаларының дөңестігі мен күрт майысу бағыттары июші моменттердің эпюраларының арқалықтың созылған не сығылған талшықтарына тұрғызыларына байланысты:

а) егер M эпюрасының оң ординаттары сығылған талшықтарда тұрғызылса, параболаның дөңестігі таралған күштің бағытына қарама-қарсы, ал сыну бұрышы сыртқы қадалған күштің бағытына қарама-қарсы;

б) егер M эпюрасының оң ординаттары созылған талшықтарда тұрғызылса, параболаның дөңестігі таралған күштің бағытымен бағыттас болады, ал сыну бұрышы сыртқы қадалған күштің бағытымен бағыттас.

Бұл оқулықта июші моменттердің эпюралары арқалықтың сығылған талшықтарында тұрғызылады.

Аралықтың қауіптігі қимасын анықтау үшін Q және M эпюраларын тұрғызу қажет. **Қауіпті қима** деп ию моменттерінің абсолют ең үлкен шамасы әсер ететін қиманы айтады.

20.4. Көлденең күштер мен ию моменттерінің эпюраларын тұрғызу

Арқалықтың кернеулі күйін жете зерттегенде, арқалықтың барлық көлденең қимасындағы ішкі күштерді білу, яғни көлденең күштер мен ию моменттерінің арқалықтың ұзына бойындағы өзгеру заңдылығын білу қажет. Q мен M -нің өзгеру заңдылығын олардың сызбасын көлденең күштер мен ию моменттерінің эпюраларын тұрғызып бақылаған ыңғайлы.

Типті жүктелген арқалықтардың Q және M эпюраларын тұрғызудың бірнеше мысалын қарастырайық.

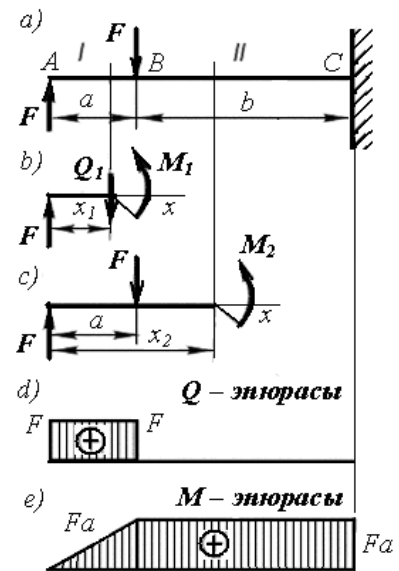
20.1-мысал. Шамалары тең екі күшпен жүктелген қатаң тіректі арқалықтың (20.10, *a*-сурет) Q және M эпюраларын тұрғызыңыз.

Шешуі: Арқалық екі аралықтан тұрады. Қию әдісі мен ішкі күштер таңбаларының ережесін қолдана отырып, әрбір аралықтағы Q мен M -ді анықтайық.

I аралық (20.10, *b*-сурет): $0 \leq x_1 \leq a$.

$$Q_I = F,$$

яғни көлденең күш x_1 -ге тәуелді емес. Сондықтан I аралықтағы Q эпюрасы базистік сызыққа параллель түзумен шектеледі.



20.10-сурет

$$M_I = F \cdot x_1,$$

яғни ию моменті айнымалы

$$x_1 = 0 \quad M_I = 0; \quad x_1 = a \quad M_I = F \cdot a.$$

Бұл аралықтағы көлденең қималарда ию моменті 0 ден $F \cdot a$ мәніне дейін өзгереді, яғни M эпюрасы көлбеу түзумен шектелетінін көрсетеді.

II аралық (20.10, с-сурет): $a \leq x_2 \leq a + b$.

$$Q_{II} = F - F = 0.$$

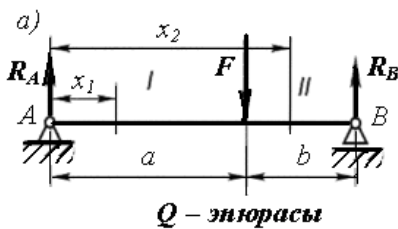
Ию моментінің мәні

$$M_{II} = F \cdot x_2 - F \cdot (x_2 - a) = F \cdot a.$$

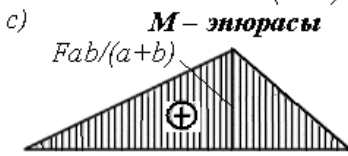
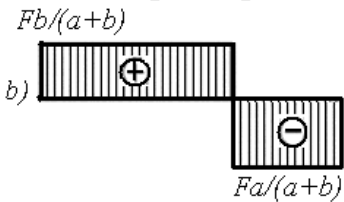
II аралықта тек ию моменті ғана пайда болады, сондықтан II аралықтағы M эпюрасы базистік сызыққа параллель түзумен шектеледі және бұл аралық таза иілу күйінде болады.

Q және M эпюралары 20.10, d және 20.10, e -суреттерінде келтірілген.

20.2-мысал. A және B тіректерінің аралығында F күшімен жүктелген қостіректі арқалықтың (20.11, a -сурет) Q және M эпюраларын тұрғызыңыз.



Q – эпюрасы



20.11-сурет

Шешуі: Алдыңғы есепке қарағанда, мұнда алдын ала арқалық тіректерінің R_A және R_B реакцияларын анықтау қажет. Ол үшін A және B тіректеріне қатысты моменттердің теңдеулерін құрайық

$$\sum M_A = 0, \quad R_B(a + b) - Fa = 0;$$

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A(a + b) + Fb = 0.$$

Бұл теңдеулерден реакциялардың шамалары мынаған тең:

$$R_A = \frac{Fb}{a + b}, \quad R_B = \frac{Fa}{a + b}.$$

Реакциялардың дұрыстығын статиканың келесі теңдеуімен тексерейік:

$$\sum Y = 0, \quad R_A - F + R_B = \frac{Fb}{a + b} - F + \frac{Fa}{a + b} = 0.$$

Арқалық екі аралықтан тұрады. Әрбір аралыққа қию әдісін қолданып және қиманың оң жағындағы арқалықтың бөлігін алып тастай отырып, Q мен M -нің аналитикалық өрнектерін жазайық:

I аралық : $0 \leq x_1 \leq a$.

$$Q_I = R_A = \frac{Fb}{a+b}, \quad M_I = R_A x = \frac{Fbx_1}{a+b}.$$

Сонымен, I аралықтағы көлденең күш тұрақты және $\frac{Fb}{a+b}$ -ге тең, ал ию моменті x_1 -ге тәуелді, яғни айнымалы

$$x_1 = 0 \quad M_I = 0; \quad x_1 = a \quad M_I = R_A a = \frac{Fba}{a+b}.$$

Байқағандарыңыздай, бұл аралықтағы ию моменті сызықтық заңдылықпен 0-ден $\frac{Fba}{a+b}$ мәніне дейін өзгереді.

II аралық: $a \leq x_2 \leq a+b$.

$$Q_{II} = R_A - F = \frac{Fb}{a+b} - F = -\frac{Fa}{a+b},$$

$$M_{II} = R_A x_2 - F(x_2 - a) = \frac{Fbx_2}{a+b} - F(x_2 - a).$$

II аралықтағы көлденең күш – тұрақты шама және $-\frac{Fa}{a+b} = -R_B$.

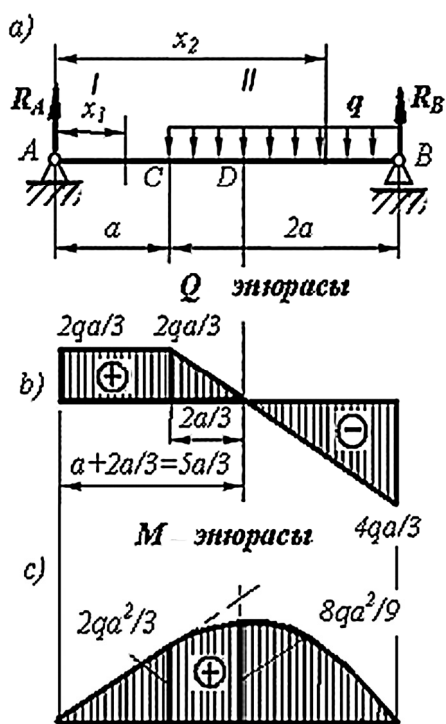
Ию моментінің x_2 -ге байланысты мәндері:

$$x_2 = a, \quad M_{II} = \frac{Fba}{a+b};$$

$$x_2 = a+b, \quad M_{II} = \frac{Fb(a+b)}{a+b} - F(a+b-a) = 0.$$

Ию моменті сызықтық заңдылықпен $\frac{Fba}{a+b}$ мәнінен нөлге дейін кемиді. Q және M эпюралары 20.11, b және 20.11, c -суреттерінде келтірілген.

20.3-мысал. Қарқындылығы q таралған күшпен жүктелген қостіректі арқалықтың Q және M эпюраларын тұрғызыңыз (20.12-сурет).



20.12-сурет

Шешуі: A және B тіректеріне қарасты құрылған тепе-теңдік теңдеулерінен арқалықтың тірек реакцияларын анықтаймыз.

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A \cdot 3a + q \cdot 2a \cdot a = 0;$$

$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot 3a - q \cdot 2a \cdot 2a = 0.$$

Арқалықтың A мен B тіректерінің реакциялары

$$R_A = \frac{2qa}{3}, \quad R_B = \frac{4qa}{3}.$$

Реакциялардың дұрыс анықталғанын тексерейік:

$$\sum Y = 0, \quad R_A - 2qa + R_B = \frac{2qa}{3} - 2qa + \frac{4qa}{3} = 0.$$

Алдыңғы қарастырылған есептердегідей, арқалық екі аралықтан тұрады.

I аралық : $0 \leq x_1 \leq a$.

$$Q_I = R_A = \frac{2qa}{3} = const, \quad M_I = R_A x_1 = \frac{2qa x_1}{3}.$$

$$x_1 = 0, \quad M_I = 0; \quad x_2 = 0, \quad M_I = R_A a = \frac{2qa^2}{3}.$$

Аралықтағы ию моментінің сызықтық заңдылықпен 0-ден $\frac{2qa^2}{3}$ мәніне дейін өзгеретінін байқаймыз.

II аралық: $a \leq x_2 \leq 3a$.

$$Q_{II} = R_A - q(x_2 - a) = \frac{2qa}{3} - q(x_2 - a),$$

$$M_{II} = R_A x_2 - q(x_2 - a) \frac{x_2 - a}{2} = \frac{2qax_2}{3} - \frac{q(x_2 - a)^2}{2}.$$

II аралықтағы көлденең күш пен ию моменттерінің x_2 -ге байланысты мәндерін өзгертетінін көреміз.

$$x_2 = a, \quad Q_{II} = \frac{2qa}{3}, \quad M_{II} = \frac{2qa^2}{3};$$

$$x_2 = 3a, \quad Q_{II} = -\frac{4qa}{3}, \quad M_{II} = 0.$$

Аралық ұштарындағы көлденең күш мәндерінің таңбалары «+» және «-». Бұл көлденең күш аралықтың қандай да бір қимасында нөлге тең болатындығын білдіреді. Осы қиманың арқалықтың сол ұшынан қандай қашықтықта болатындығын келесі теңдеуден анықтаймыз:

$$Q_{II} = \frac{2qa}{3} - q(x^* - a) = 0,$$

мұнан

$$x^* = a + \frac{2a}{3} = \frac{5a}{3}.$$

Жоғарыда келтірілген M_{II} теңдеуінен, ию моментінің x -ке байланысты квадраттық функция екенін көреміз. Сондықтан арқалықтың таралған күш түсірілген аралығының M эпюрасы параболамен шектеледі, яғни ию моменті квадраттық заңдылықпен $\frac{2qa^2}{3}$ мәнінен нөлге дейін кемиді.

Параболаны тұрғызу үшін $Q_{II} = 0$ болатын қимадағы ию моментінің мәнін анықтайық:

$$x_2 = \frac{5a}{3}, \quad M_{II} = \frac{2qa}{3} \cdot \frac{5a}{3} - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{5a}{3} - a\right)^2 = \frac{8qa^2}{9}.$$

Q және M эпюралары 20.12, b және 20.12, c -суреттерінде келтірілген.

20.5. Жазық иілген түзу арқалықтың тік кернеулері

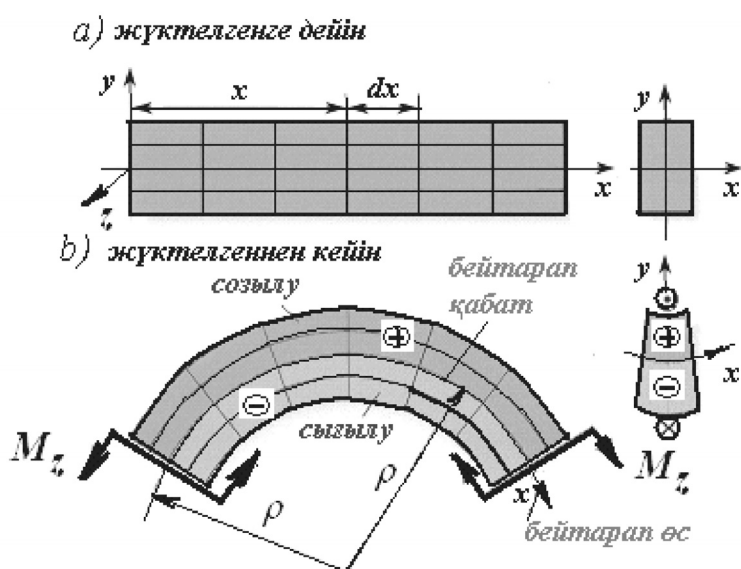
Арқалықтың иілуін қарастырғанда қию әдісін пайдаланып, берілген қимада туындайтын көлденең күш пен ию моменттерін анықтай аламыз. Енді қимадағы серпімді күштердің таралу заңдылығы мен есептеу формулаларын қорытындылау үшін мынадай болжамдар енгізейік:

1) деформацияланбаған арқалықтың өсіне перпендикуляр жазық қима арқалық иілгеннен кейін де жазық және арқалықтың иілген өсінің нормалі бойында жатады (жазық қималар болжамы);

2) арқалықтың бойлық талшықтары оның деформацияланған жағдайында бір-біріне әсер етпейді.

Арқалықтың бойлық талшықтары мен көлденең қимасын

еліктететін, берілген арқалықтың бүйір бетіне бойлық өске параллель және көлденең тік сызықтармен тор жүргізейік (20.13, a -сурет). Егер арқалықтың екі ұшын қарама-қарсы бағытталған қос күшпен жүктесек, онда бойлық сызықтар шеңбердің доғасын құрап, майысады, ал көлденең сызықтар түзу күйінде қала отырып, өзара



20.13-сурет

қандай да бір бұрышқа бұрылады (20.13, *b*-сурет). Демек, таза иілудегі арқалықтың деформациялану күйі жазық қималар болжамының дұрыстығын толығымен сипаттайды.

Сонымен, таза иілуде көлденең қималар бұрылады және арқалықтың дөңес жағындағы бойлық талшықтары ұзарады, ал ойыс жағындағы қысқарады. Олай болса, арқалықтың қандай да бір қабатындағы талшықтар не ұзармауы, не қысқармауы мүмкін, яғни арқалық деформацияланғанда, ұзындықтары өзгермейді. Арқалықтың ұзындығы өзгеріссіз қалатын талшықтарының геометриялық орны **бейтарап қабат** (БҚ) деп, ал бейтарап қабаттың кез келген көлденең қимамен қиылысу сызығы қиманың **бейтарап өсі** деп аталады (20.13, *b*-сурет). Жалпы алғанда, әзірге оның орны белгісіз.

Арқалықтан бір-бірінен dx қашықтықтағы іргелес екі көлденең қимамен кесілген элементін алып (20.14-сурет), оның деформацияланған күйін қарастырайық. Бұл элементтің бір-бірімен $d\theta$ бұрыш жасай бұрылған қималары шамалары тең M моменттерімен жүктелген. Деформациядан кейін бейтарап қабат, OO_1 радиусы ρ доғаға (20.14-сурет), ал бейтарап қабаттан y қашықтықта жатқан AB қабаттар радиусы $\rho + y$ доғаға айналады.

Бейтарап қабаттың қисықтығы

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (20.3)$$

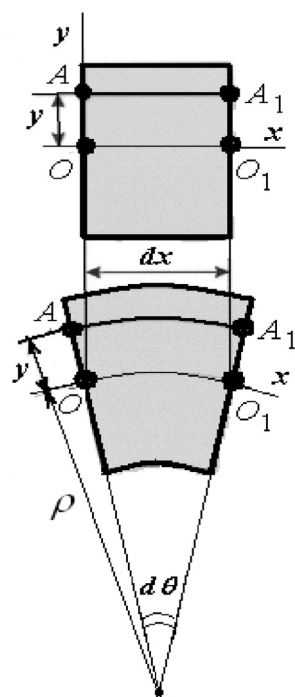
Иілген арқалықтың кез келген AB қабаты 20.14-суретте көрсетілгендей,

$$\Delta dx = \overset{\frown}{AA_1} - \overset{\frown}{OO_1} = (\rho + y) \cdot d\theta - \rho \cdot d\theta = y \cdot d\theta$$

шамасына ұзарады. Онда оның салыстырмалы ұзаруының шамасы

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{d\theta}{dx} \cdot y,$$

немесе (20.3) өрнегін ескерсек,



20.14-сурет

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (20.4)$$

екенін көреміз.

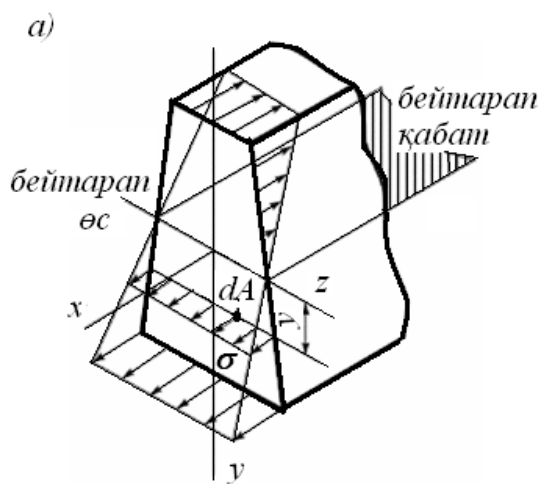
Мұнан талшықтың салыстырмалы бойлық деформациясы оның бейтарап өске дейінгі арақашықтығына тура пропорционалдығын тұжырымдаймыз.

Деформациядан кернеуге көшу үшін Гук заңын қолданамыз

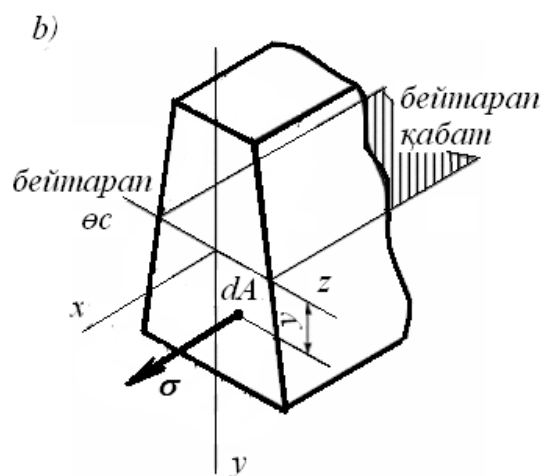
$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}. \quad (20.5)$$

Гук заңын мұндай түрде пайдалану – арқалықтың бойлық талшықтарының бір-біріне әсер етпейді деп қабылдаған болжамға байланысты, яғни талшықтар бір өстік созылу немесе сығылу күйінде болады деген болжам.

(20.5) өрнегі көлденең қиманың кез келген нүктесіндегі тік кернеу нүктенің бейтарап өске дейінгі y қашықтығына тура пропорционал. 20.15-суретте (20.5) формуласының сызба түсініктемесі келтірілген. Бейтарап өсте жатқан нүктелердің кернеуі $\sigma = 0$. Егер, әдеттегідей, созылу кернеулерін қимадан, ал сығылу кернеулерін қимаға бағыттасақ, онда біз қимадағы кернеудің сызықтық таралуының 20.13-суретте көрсетілгендей кескінін аламыз. Қиманың ең жоғарғы және ең төменгі нүктелерінде тиісінше ең кіші және ең үлкен кернеулер туындайды.



20.15-сурет



20.16-сурет

Таза иілгенде көлденең қимадағы бойлық күш нөлге тең болады деген шартты пайдаланып, бейтарап өстің орнын анықтаймыз. Көлденең қиманы көптеген dA элементар аудандарға бөліп (20.16-сурет) және $\sigma dA = \frac{E y dA}{\rho}$ элементар бойлық күштердің барлық қиманың ауданы бойынша қосындысын анықтасақ, мынаны аламыз:

$$N = \int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

Алынған интеграл бейтарап өске қатысты көлденең қиманың статикалық моментін береді, ол тек қиманың ауырлық центрінен өтетін центрлік өске қарағанда нөлге тең. Олай болса, иілген арқалықтың бейтарап өсі қиманың центрлік өсімен сәйкес келеді. Бұдан дәлелдеусіз мынаны тұжырымдауға болады: *таза иілуде, яғни күш жазықтығы бас жазықтыққа, сәйкес келген жағдайда бейтарап өсі центрлік бас өспен сәйкес келеді.*

Бейтарап қабаттың қисықтығын анықтау мақсатында бейтарап өске қатысты ішкі күштер моменттерін табайық. Ол үшін өске қатысты σdA элементар бойлық күштердің $dM = y \cdot \sigma dA$ элементар моменттерінің қосындысын есептеп, оны ию моментіне теңестірейік:

$$M = \int_A dM = \int_A y \cdot \sigma dA = \int_A \sigma y dA.$$

σ кернеу орнына (20.5) өрнегінен оның мәнін қойсақ:

$$M = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA.$$

Өрнекке кіретін интеграл арқалықтың көлденең қимасының Z өсіне қатысты екпін моментін білдіреді $-\int_A y^2 dA = I_z$, сондықтан

$$M = \frac{EI_z}{\rho}, \text{ осыдан}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (20.6)$$

Бұл өрнекпен иілу деформациясын сипаттайтын арқалықтың иілген өсінің қисықтығы анықталады. Мұндағы EI_z – арқалықтың алғашқы пішінінің өзгеруіне қарсыласуын сипаттайтын шама, ол **арқалықтың қатаңдығы** деп аталады.

(20.5) және (20.6) теңдеулерінен ρ шығарсақ, арқалықтың көлденең қимасының кез келген нүктесіндегі тік кернеуді анықтайтын формуланы аламыз:

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y. \quad (20.7)$$

Берілген қимадағы абсолют шамасы бойынша ең үлкен кернеуді анықтау үшін, (20.7) өрнегіне y -тің орнына осы қимадағы оның ең үлкен мәні y_{max} -ді қойса болғаны:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I_z} y_{max} = \frac{M}{\frac{I_z}{y_{max}}}.$$

Мұндағы $\frac{I_z}{y_{max}}$ қатынасы қиманың бейтарап өске қатысты кедергі

моментін білдіреді, яғни $W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$, олай болса,

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z}. \quad (20.8)$$

Төменде іс жүзінде жиі кездесетін қималардың кедергі моменттері келтірілген:

а) төртбұрышты қима үшін:

$$W_z = \frac{bh^2}{6},$$

мұндағы b, h – тиісінше қиманың ені мен биіктігі;

b) дөңгелек қима үшін:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3;$$

c) дөңгелек сақина пішіндес қима үшін:

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - c^4),$$

мұндағы $c = \frac{d}{D}$, D – сақинаның сыртқы диаметрі; d – сақинаның ішкі диаметрі.

Прокатты қималар үшін W_z -тің мәндері арнайы сортамент кестелерінде беріледі.

Созылған немесе сығылған талшықтардың қайсысының бейтарап өстен шалғай жатқанына байланысты, қимадағы ең үлкен кернеудің таңбасы оң немесе теріс, яғни ең үлкен кернеу созылу кернеуі немесе сығылу кернеуі болуы мүмкін. Егер қима бейтарап өске қарағанда симметриялы болса, онда екі (20.7) және (20.8) формулалары таза иілген түзу арқалық үшін қорытып шығарылған. Иілудің жалпы жағдайында тұжырымдауға негіз болған болжаулар көлденең күштің әсері салдарынан өз күшін жояды, яғни қималар жазық күйінде қалмайды, бойлық талшықтар өзара әсерлеседі.

Бірақ зерттеулердің нәтижелері көрсеткендей, таза иілуді қарастырып алынған (20.7) өрнегі көлденең жазық иілген арқалықтардың қимасындағы тік кернеуді анықтау үшін де қолдануға болады.

20.6. Жанама кернеулерді анықтау. Журавский формуласы

Иілудің жалпы жағдайында (көлденең иілгенде) арқалықтың көлденең қимасында иілу моментімен қатар көлденең күш те пайда болады. Иілу моментінің туындауы көлденең қимада тік кернеулердің

пайда болуымен байланысты және олардың шамаларын анықтауға (20.7) және (20.8) формулаларын қолдануға болады.

Көлденең күштің туындауы көлденең қимада жанама кернеулердің пайда болуымен байланысты, ал жанама кернеудің жұптық заңы арқалықтың бойлық қимасында да осындай жанама кернеулердің болатынын көрсетеді. Жанама кернеулерді анықтау үшін, көлденең иілген арқалықты қарастырып, онан ұзындығы dx төртбұрышты элементті кесіп алып қарастырамыз (20.17, a -сурет).

Бұл элементті бейтарап өстен y қашықтықта бойлық жазық қима жүргізіп екіге бөлеміз де, табанының ені b төменгі бөлігінің тепе-тендігін қарастырамыз (20.17, b , c -сурет). Жанама кернеулердің жұптық заңына сәйкес, көлденең қимаға әсер ететін жанама кернеулердің шамасы бойлық қимадағы жанама кернеулерге тең (20.17, b -сурет). Осы жәйттерді ескеріп және жанама кернеулер $b \cdot dx$ ауданында бірқалыпты таралады деп болжай отырып (20.17, d -сурет), $\sum F_{ix} = 0$ тепе-тендік шартынан

$$N^* - N^* - dN^* + \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

тендігін аламыз, мұнан

$$\tau = \frac{dN^*}{b \cdot dx}, \quad (20.9)$$

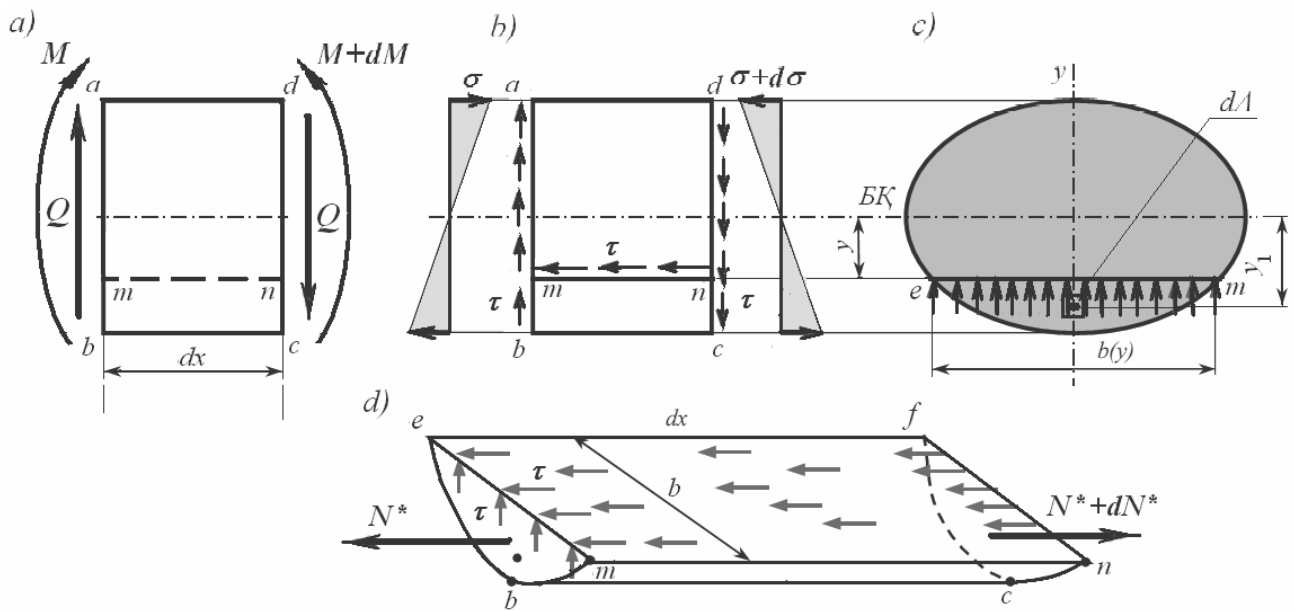
мұндағы $N^* - dx$ элементінің сол жағындағы көлденең қимада әсер ететін $\sigma \cdot dA$ бойлық күштің тең әсерлі күші:

$$N^* = \int_A \sigma \cdot dA. \quad (20.10)$$

Соңғы өрнекті (20.7) қатынасты ескере отырып, келесі түрде жазамыз

$$N^* = \frac{M_z}{I_z} \int_A y_1 \cdot dA, \quad (20.11)$$

мұндағы $S_z = \int_A y_1 \cdot dA$ – бейтарап өстен y қашықтықта орналасқан (20.17, c -суреттегі сызықшаланған аудан) көлденең қиманың статикалық моменті.



20.17-сурет

Сондықтан (20.11) былайша жазылады:

$$N^* = \frac{M_z S_z}{I_z}.$$

Олай болса:

$$dN^* = \frac{dM_z S_z}{I_z}. \quad (20.12)$$

(20.9) және (20.12) өрнектерін бірге қарастыру нәтижесінде

$$\tau = \frac{S_z}{I_z \cdot b} \cdot \frac{dM_z}{dx}$$

аламыз, ал $\frac{dM_z}{dx} = Q_y$ болғандықтан, жанама кернеуді анықтайтын формуланың соңғы түрін

$$\tau = \frac{Q_y S_z}{I_z \cdot b} \quad (20.13)$$

Мұндағы Q_y – аралықтың қарастырылып отырған қимасындағы көлденең күш; S_z – көлденең қиманың кесілген ауданының статикалық моменті; I_z – көлденең қиманың екпін моменті; b – қарастырылып отырған нүктеден бейтарап өске параллель жүргізілген қиманың ені.

Алынған (20.13) формула орыс ғалымы Д.И.Журавскийдің атымен, яғни **Журавский формуласы** деп аталады.

Сонымен, мынаны тұжырымдауымызға болады: көлденең иілген арқалықтың көлденең қимасындағы бейтарап өстен кез келген қашықтағы нүктедегі жанама кернудің шамасы (20.13) формуласымен есептеледі.

Бейтарап өстегі нүктелердегі кернеулерді анықтау үшін Журавский формуласы былайша жазылады:

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_z^0}{I_z \cdot b_0}, \quad (20.14)$$

мұндағы S_z^0 – көлденең қиманың жарты ауданының бейтарап өске қатысты статикалық моменті; b_0 – бейтарап өс деңгейіндегі қиманың ені.

(20.14) формуласы бейтарап өс деңгейіндегі нүктелерде ең үлкен жанама кернеу туындайтынын көрсетеді.

Көптеген жағдайларда арқалықты есептеуде және оның қимасын таңдауда тік кернеу бойынша тұрғызылған беріктік шарты қолданылады. Кейбір жағдайларда ғана жанама кернеу бойынша тұрғызылған беріктік шартты тік кернеудің беріктік шарты бойынша жүргізілген есептеуді тексеруге пайдаланады.

20.7. Иілуге есептеу, мүмкіндік кернеу

Иілген арқалықтың беріктігін тексеру үшін M эпюрі тұрғызылып, қауіпті қимасы анықталады. *Қауіпті қима* деп абсолют шамасы ең

үлкен ию моменті M_{max} және көлденең күш Q_{max} әсер ететін қиманы айтады.

Мүмкіндік кернеулер бойынша иілген аралықтардың беріктігін тексеру үшін, төменде көрсетілген қауіпті нүктелерде беріктік шартын қамтамасыз ету керек:

a) тік кернеулер үшін қауіпті нүктелер – бейтарап өстен шалғай жатқан нүктелер. Бұл нүктелердің беріктік шарты

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (20.15)$$

мұндағы $[\sigma]$ – мүмкін тік кернеу;

b) жанама кернеулер үшін қауіпті нүктелер – қиманың бейтарап өсінде жатқан нүктелер. Бұл нүктелердің беріктік шарты

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_z^0}{I_z \cdot b_0} \leq [\tau] \quad (20.16)$$

мұндағы $[\tau]$ – мүмкін жанама кернеу;

Беріктік шарттарына сүйене отырып, төмендегідей есептер: жобалау есебі, беріктікті тексеру есебі, жүк көтеру қабілетін анықтау есебі қарастырылады.

Иілудің (20.15) беріктік шарты бойынша қарастырылатын үш түрлі есептеудің формуласын келтірейік:

$$1) W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}; \quad 2) \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \leq [\sigma]; \quad 3) M_{max} \geq W_z [\sigma].$$

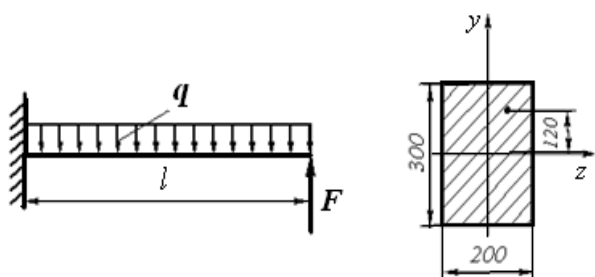
Жоғарыда келтірілгендей, иілу деформациясы арқалықтың жекеленген талшықтарының созылуы мен сығылуын зерттеуге келтіріледі, сондықтан беріктік шартынан алынған теңдеулерді қолданғанда және мүмкіндік кернеуді таңдауда мұны естен шығармау керек.

Созылу мен сығылуға бірдей қарсыласатын пластикалық материалдар үшін арқалықтың көлденең қимасын бейтарап өске симметриялы таңдаған ыңғайлы. Егер берілген материалдың созылу

мен сығылу мүмкіндік кернеулері әртүрлі болса (морт материалдар), онда ең үлкен кернеу туындайтын талшықтар арқалықтың бейтарап өсіне жақындау болатын симметриялы емес қима тағайындау қажет. Бұл жағдайда қиманың созылған және сығылған талшықтар бөлігінің кедергі моменттері әртүрлі болатыны анық, сондықтан қиманың созылған және сығылған бөліктеріне жеке-жеке есептеулер жүргізудің қажеттігі туындайды.

20.4-мысал. Көлденең қимасы $0,2 \times 0,3$ м тікбұрышты ағаш арқалықтың бір ұшы қатаң бекітіліп, суретте көрсетілгендей күштердің әсерінен иілген (20.18-сурет). Қауіпті қимадағы ең үлкен және бейтарап өстен $0,12$ м қашықтықтағы нүктедегі тік кернеулерді анықтаңыз. $F = 13,5$ кН; $q = 10$ кН / м; $l = 3,6$ м.

Шешу: Көрсетілгендей, жүктемемен жүктелген арқалықта (20.18-сурет) ең үлкен июші момент M_{max} тірек қимасына сәйкес келеді:



20.18-сурет

$$M_{max} = \left| Fl - \frac{ql^2}{2} \right| =$$

$$= \left| 13,5 \cdot 3,6 - \frac{10 \cdot 3,6^2}{2} \right| = 16,2 \text{ кНм.}$$

Бейтарап өске қатысты қиманың екпін және кедергі моменттері

$$I_z = \frac{0,2 \cdot 0,3^3}{12} = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$$

$$W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{4,5 \cdot 10^{-4}}{0,15} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Қауіпті қимадағы ең үлкен тік кернеудің шамасы:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{16,2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-3}} = 5,4 \text{ МПа}$$

Арқалықтың көлденең қиманың C нүктесіндегі кернеуді анықтаймыз:

$$\sigma_c = \frac{16,2 \cdot 10^3}{4,5 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,12 = 4,32 \text{ МПа.}$$

20.5-мысал. Арқалықтың қауіпті қимасындағы ию моменті $M_{max} = 37,5 \text{ кНм}$. Арқалықтың үш түрлі көлденең қимасын анықтаңыз: ені мен биіктігінің қатынасы $\alpha = 0,5$ тік төртбұрышты, дөңгелек және прокатты қоставр қималарын анықтаңыз. Мүмкіндік кернеу $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Шешуі: 1) Бұл жобалау есептеуіне жатады. (20.15) формуладан арқалықтың тік төртбұрышты қимасын анықтаймыз. Осы формула негізінде қиманың қажетті кедергі моментін табамыз:

$$W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{37,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 234,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Арқалықтың үш түрлі қимасын анықтаймыз.

1) Ені мен биіктігінің қатынасы $\alpha = 0,5$ тік төртбұрышты қима үшін,

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{\alpha^2 b^3}{6} = \frac{0,25h^3}{6} = \frac{h^3}{24},$$

немесе

$$\frac{h^3}{24} = 234,4 \cdot 10^{-6},$$

олай болса,

$$h = \sqrt[3]{24 \cdot 234,4 \cdot 10^{-6}} = \sqrt[3]{5625,6 \cdot 10^{-6}} = 0,178 \text{ м.}$$

Жуықтай отырып, арқалықтың қимасының өлшемдерін $h = 0,18 \text{ м}$, $b = 0,5 \cdot 0,18 = 0,09 \text{ м}$ немесе $h = 18 \text{ см}$ және $b = 9 \text{ см}$ деп қабылдаймыз.

2) Арқалықтың дөңгелек қимасын сол беріктік шартынан, кедергі моментін

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = 234,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

теңестіре отырып анықтаймыз.

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 234,4 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 0,134 \text{ м.}$$

Сонымен, $d = 0,134 \text{ м} = 13,4 \text{ см}$.

3) Арқалықтың қоставрлы қимасын анықтаймыз. Есептеме бойынша қажетті кедергі моментінің шамасы $W_z = 234,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 234,4 \text{ см}^3$, олай болса прокат пішіндердің арнаулы кестесінен (8239-89 МемСТ) кедергі моменті $W_z = 233 \text{ см}^3$ № 22 пішінді немесе $W_z = 254 \text{ см}^3$ № 22 а пішінді қоставрды алуымыз қажет. Ол үшін алдымен арқалықтың қимасы № 22 деп алған жағдайдағы арқалықтың беріктік шартын тексереміз:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{37,5 \cdot 10^3}{232 \cdot 10^{-6}} = 162 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Арқалықтың шамадан тыс жүктелуінің шамасы

$$\delta = \frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{162 - 160}{160} \cdot 100\% = 1,25\%.$$

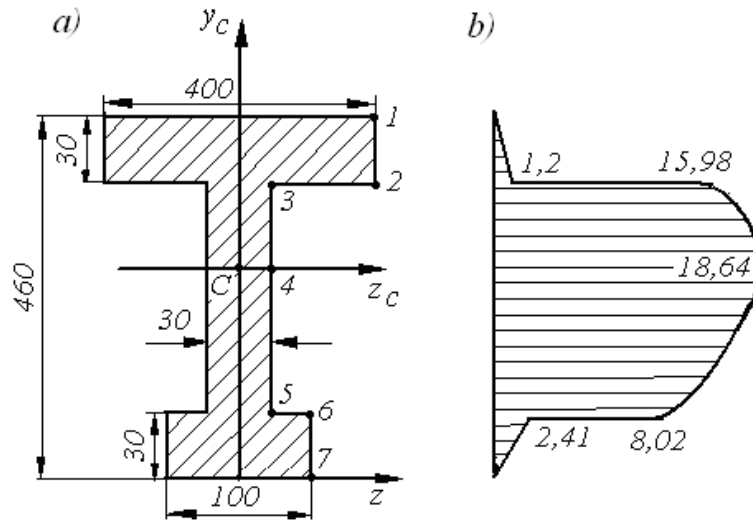
Бұл – жеткілікті шама, сондықтан № 22 қоставрды арқалықтың қажетті қимасы деп аламыз.

20.6-мысал. Берілген қимадағы (20.19, а-сурет) жанама кернеудің эпюрасын тұрғызыңыз. Қимадағы көлденең күш $Q = 200 \text{ кН}$.

Шешуі: Қарастырылып отырған қиманың кез келген нүктесіндегі жанама кернеулер Журавскийдің формуласымен анықталады. Ол үшін қиманың ауырлық центрін тауып, ол арқылы өтетін бейтарап өске қатысты әр нүктенің геометриялық сипаттамаларын анықтау қажет.

Қиманы үш тік төртбұрыштан құралған деп қарастырамыз. Көмекші өс ретінде қиманың төменгі қыры арқылы жүргізілген z өсін қабылдап, оған қатысты қиманың ауырлық центрін анықтаймыз:

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{40 \cdot 3 \cdot 44,5 + 40 \cdot 3 \cdot 23 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5}{40 \cdot 3 + 40 \cdot 3 + 10 \cdot 3} = 30,2 \text{ см.}$$



20.19-сурет

Бейтарап z_c өсіне қатысты қиманың екпін моменті

$$I_{z_c} = \left(\frac{40 \cdot 3^3}{12} + 14,3^2 \cdot 40 \cdot 3 \right) + \left(\frac{3 \cdot 40^3}{12} + (-7,2)^2 \cdot 3 \cdot 40 \right) + \left(\frac{10 \cdot 3^3}{12} + (-28,7)^2 \cdot 10 \cdot 3 \right) = 71582,8 \text{ см}^4.$$

Енді әрбір нүкте деңгейінен бейтарап өске параллель жүргізілген түзулер арқылы бөлінетін қиманың кесілген бөліктерінің бейтарап өске қатысты сәйкес статикалық екпін моменттері мен нүктелер деңгейіндегі бөліктердің сәйкес ендерін анықтайық:

- бірінші нүкте үшін $S_z^{(1)} = 0$; $b_1 = 40 \text{ см}$;
- екінші нүкте үшін $S_z^{(2)} = 40 \cdot 3 \cdot (44,5 - 30,2) = 1716 \text{ см}^3$; $b_2 = 40 \text{ см}$;
- үшінші нүкте үшін $S_z^{(3)} = S_z^{(2)} = 1716 \text{ см}^3$; $b_3 = 3 \text{ см}$;
- төртінші нүкте үшін $S_z^{(4)} = 40 \cdot 3 \cdot 14,3 + 3 \cdot 13,8 \cdot 6,9 = 2001,66 \text{ см}^3$; $b_4 = 3 \text{ см}^3$;
- бесінші нүкте үшін $S_z^{(5)} = 3 \cdot 10 \cdot 28,7 = 861 \text{ см}^3$; $b_5 = 10 \text{ см}$;
- алтыншы нүкте үшін $S_z^{(6)} = S_z^{(5)} = 861 \text{ см}^3$; $b_6 = 10 \text{ см}$;

– жетінші нүкте үшін $S_z^{(7)} = 0$; $b_7 = 10 \text{ см}$.

Қарастырылып отырған нүктелердегі жанама кернеулерді анықтап, қимадағы жанама кернеудің эпюрасын тұрғызамыз:

$$\tau_1 = 0; \quad \tau_2 = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 1716 \cdot 10^{-6}}{71582,8 \cdot 10^{-8} \cdot 0,4} = 1,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 1716 \cdot 10^{-6}}{71582,8 \cdot 10^{-8} \cdot 0,03} = 15,98 \text{ МПа};$$

$$\tau_4 = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 2001,66 \cdot 10^{-6}}{71582,8 \cdot 10^{-8} \cdot 0,03} = 18,64 \text{ МПа};$$

$$\tau_5 = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 861 \cdot 10^{-6}}{71582,8 \cdot 10^{-8} \cdot 0,03} = 8,02 \text{ МПа};$$

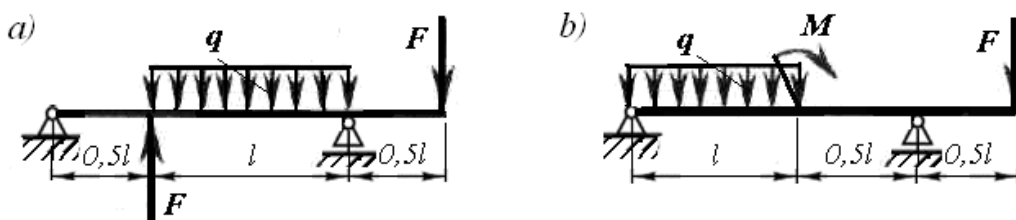
$$\tau_6 = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 861 \cdot 10^{-6}}{71582,8 \cdot 10^{-8} \cdot 0,1} = 2,41 \text{ МПа};$$

$$\tau_7 = 0.$$

Жанама кернеудің эпюрі 20.19, *b*-суретте көрсетілген.

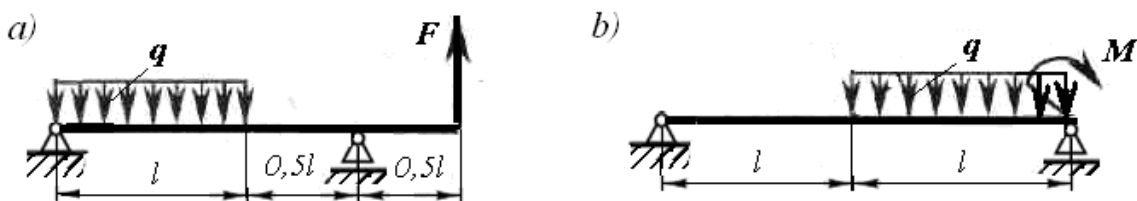
Жаттығу есептері

1-есеп. Суретте көрсетілген арқалықтардың көлденең күш және ию моменті эпюраларын тұрғызыңыз (1-сурет). $q = 20 \text{ кН/м}$, $F = 30 \text{ кН}$, $M = 25 \text{ кНм}$, $l = 2 \text{ м}$.



1-сурет

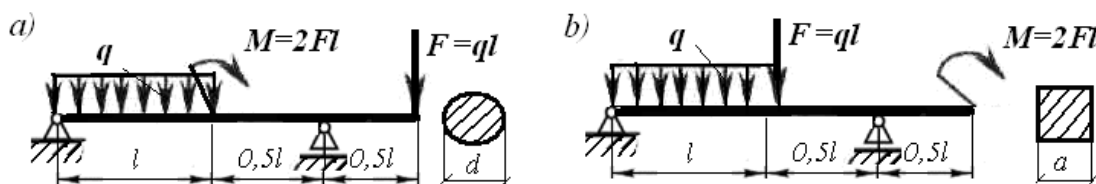
2-есеп. $q = 1,2 \text{ кН/м}$, $F = 3 \text{ кН}$, $l = 2 \text{ м}$ деп алып, № 20 швеллерлі арқалықтың қауіпті қимасындағы ең үлкен тік кернеуді анықтаңыз (2, a-сурет).



2-сурет

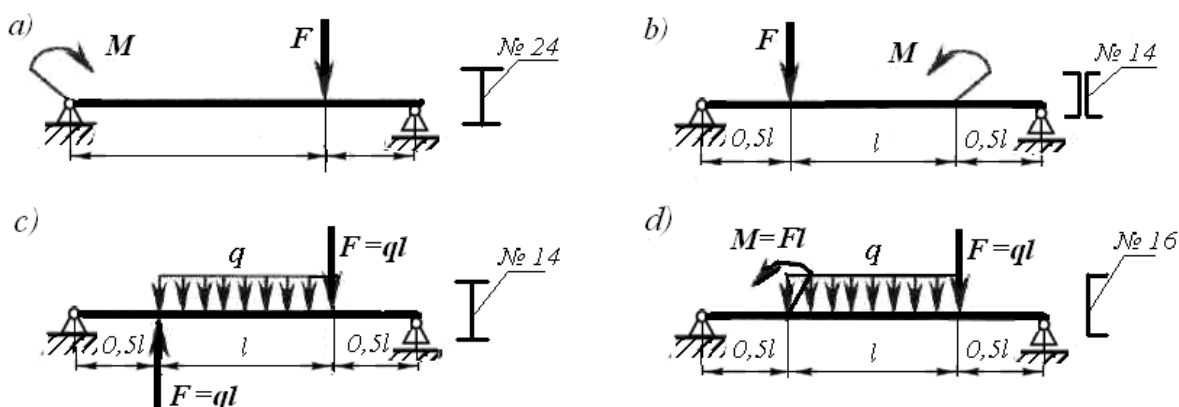
3-есеп. $q = 1,2 \text{ кН/м}$, $M = 4 \text{ кНм}$, $l = 2 \text{ м}$ деп алып, диаметрі $d = 12 \text{ см}$ дөңгелек ағаш арқалықтың қауіпті қимасындағы ең үлкен тік кернеуді анықтаңыз (2, b-сурет).

4-есеп. Қос тіректі ағаш арқалықтардың көлденең қималарының өлшемдерін анықтаңыз (3-сурет). $q = 8 \text{ кН/м}$, $l = 2 \text{ м}$, $[\sigma] = 12 \text{ МПа}$.



3-сурет

5-есеп. Қос тіректі болат арқалықтардың беріктігін тексеріңіз (4, a, b-сурет). $M = 5 \text{ кНм}$, $F = 2 \text{ кН}$, $l = 2 \text{ м}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.



4-сурет

6-есеп. Қос тіректі арқалықтардың жүк көтергіштігін анықтаңыз (4, c, d-сурет). $l = 2 \text{ м}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Қайталау сұрақтары:

1. Таза және көлденең иілу дегеніміз не?
2. Жазық күштер жүйесі әсерінен арқалықтың көлденең қимасында қандай күш әсерлері пайда болады?
3. Ішкі күштер үшін қандай таңба ережелері қабылданған?
4. Арқалықты бекіту үшін қандай тіректер қолданылады?
5. Тірек реакцияларын анықтауда қандай теңдеулер пайдаланылады?
6. Ішкі күштердің эпюраларының ординаттары нені білдіреді?
7. Ию моменті экстремальды мәнге ие болатын қимада көлденең күш неге тең?
8. Арқалықтың аралығында таралған күш болмаса, ию моменті мен көлденең күш қандай заңдылықпен өзгереді?
9. Арқалық аралығында $Q = 0$ болса, ию моменті қалай өзгереді?
10. Арқалықтың қимасында қадалған күш F болса, Q және M эпюралары қалай өзгереді?
11. Арқалықтың қимасында қадалған момент күш M болса, ию моменті эпюралары қалай өзгереді?
12. Арқалықтың таралған күш әсер ететін аралығында ию моменті мен көлденең күш қандай заңдылықпен өзгереді?
13. Ию моментінің экстремальды мәні қалай анықталады?
14. Бейтарап қабат пен бейтарап өс дегеніміз не және олар қалай орналасады?
15. Қандай күш әсерлері арқалықтың көлденең қимасында тік кернеуді туғызады?
16. Арқалықтың көлденең қимасының екпін моменті, кедергі моменті дегеніміз не және бұл шамалардың өлшем бірліктері неге тең?
17. Таза иілген арқалықтың қимасындағы кернеу қандай заңдылықпен өзгереді?
18. Ең үлкен тік кернеу қиманың қандай нүктесінде пайда болады және қандай формуламен есептеледі?
19. Кернеудің өлшем бірлігі қандай?
20. Көлденең иілген арқалықтың көлденең қимасында қандай кернеулер туындайды?

21. Тік кернеуді анықтағанда, көлденең қиманың қандай геометриялық сипаттамалары пайдаланылады?
22. Жанама кернеуді анықтағанда, көлденең қиманың қандай геометриялық сипаттамалары пайдаланылады?
216. Иілген арқалықтың көлденең қимасының қандай деңгейінде ең үлкен жанама кернеу туындайды?
24. Иілудің тік және жанама кернеу бойынша беріктік шарты қалай жазылады?
25. Беріктік шартымен қандай есептеулер жүргізіледі?
26. Арқалықты түзу иілуде жұмыс істеу үшін қалай жүктейміз?
27. Түзу иілу кезінде қандай орын алмастырулар пайда болады?

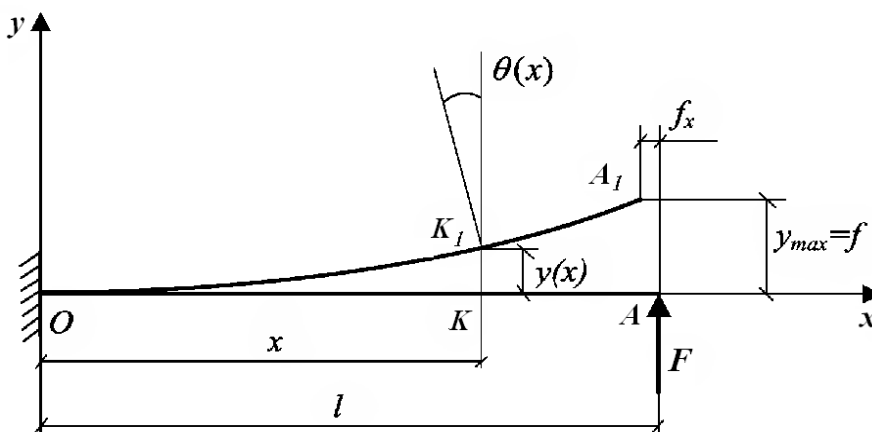
21-тарау. ИІЛУ ДЕФОРМАЦИЯЛАРЫ

21.1. Серпімді сызықтың дифференциалдық теңдеуі

Алдыңғы тарауда тұжырымдалғандай, арқалыққа иетін жүктемелер әсер етсе, онда оның бойлық өсі иіліп, майысады. Егер иілу материалдың серпімділік қасиеті төңірегінде, яғни Гук заңының шегінде өтетін болса, онда жүктемені түсіргенде арқалықтың өсі өзінің түзу қалпына келеді. Сондықтан арқалықтың иілген өсін **серпімді сызық** деп атау қалыптасқан.

Бір ұшы қатаң бекітілген AB арқалықты қарастырайық (21.1-сурет). Бас жазықта жатқан арқалықтың өсіне перпендикуляр F жүктемесінің әсерінен арқалықтың өсі сол бас жазықтық бетінде иіледі және қисық кесіндісінің кейпін алады. Серпімді деформацияланатын дененің өлшемдеріне қарағанда деформация өте кішкентай аз шама болатындығы туралы жорамалға сүйеніп, иілген арқалықтың өсін қарастыра отырып (21.1-сурет), мынаны көруге болады.

Координаттың бас нүктесін арқалықтың сол ұшымен сәйкестендіріп, x өсін арқалықтың өсі бойымен оңға, y өсін жоғары бағыттаймыз. F жүктемесінің әсерінен A нүктесі A_1 орнына ығысады. f_x орын ауыстыруы f_y -ке қарағанда өте кіші болғандықтан, оны елемеуге болады. Арқалық тек өсіне перпендикуляр бағыттағы орын ауыстыруды есептейтін боламыз, яғни $f \approx f_y$.



21.1-сурет

Сонымен, қиманың ауырлық центрінің арқалықтың бойлық өсіне перпендикуляр бағытта орын ауыстыруы *иілу (майысу)* деп аталады және $y(x)$ деп белгіленеді.

Арқалықты игенде, кез келген координаттың бас нүктесінен x қашықтықтағы K қимасы K_1 нүктесіне орын ауыстырады. Бұл орын ауыстыру абсциссасы x қиманың $y(x)$ иілуі болады. Ең үлкен иілу шамасы *иілу жebесі* деп аталады және f деп белгіленеді. 21.1-суретте иілу жebесі арқалықтың оң ұшы A нүктесіне сәйкес келеді.

$y(x)$ иілу шамасы, егер оның бағыты y өсінің оң бағытымен сәйкес келсе, оң таңбалы болып саналады, кері жағдайда – теріс таңбалы.

Арқалық майысқанда оның қимасы сызықтық орын ауыстырумен қатар, алғашқы орнына қарағанда бұрылады.

Қиманың алғашқы күйіне қатысты бұрылуын $\theta(x)$ *бұрылу бұрышы* деп атаймыз.

Бұрылу бұрышы оң таңбалы деп саналады, егер қиманың бұрылуы сағат тілі жүрісіне кері бағытталған болса, кері жағдайда – теріс таңбалы.

Сонымен, жазық иілген арқалықтың әрбір қимасының орын ауыстыруы екі шамамен: $y(x)$ *иілумен* және $\theta(x)$ *бұрылу бұрышымен* сипатталады.

Конструкцияларды қалыпты тұтыну үшін үлкен сызықтық және бұрыштық орын ауыстыруларға орын беру мүмкін емес. Мысалы, тісті берілістің майысқан білік өсі тісті доңғалақтардың және тіректердің, егер орын ауыстыру өте елеулі болса, қирауына әкеледі. Инженерлік имараттардың элементтерінде де (көпірлерді, кран астындағы арқалықтарға және т.б.) үлкен орын ауыстыруды жіберуге болмайды. Сондықтан беріктікке есептеумен қатар көптеген жағдайда қатаңдыққа есептеме жүргізіледі.

Қатаңдық шарттары былайша түзеледі:

$$f \leq [f], \quad \theta_{max} \leq [\theta].$$

Иілудің $[f]$ және бұрылу бұрышының $[\theta]$ мүмкіндік шамалары конструкциялардың қолданылуы мен оның тағайындалуына байланысты. Инженерлік имараттардың болат арқалықтары үшін

$$[f] = \left(\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{250} \right) l.$$

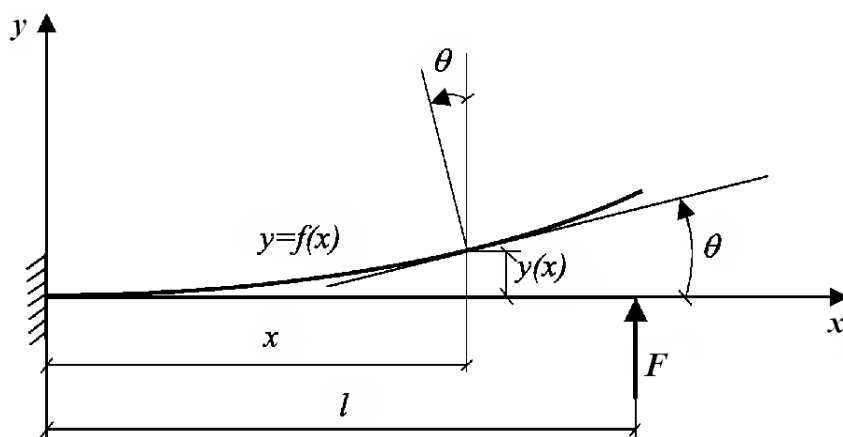
Сондықтан арқалықтың қатаңдығын зерттеу үшін орын ауыстыруды анықтай білу керек. Сонымен қатар орын ауыстыруды анықтау статикалық есептерді шешкенде де қажет.

Деформацияланбаған арқалықтың өсі x өсі болып қабылданғандықтан, серпімді сызықтың теңдеуі $y = f(x)$ болып табылады. Онда кезкелген қиманың бұрылу бұрышын серпімді сызыққа жүргізілген жанама сызығының деформацияланбаған арқалық өсімен құратын бұрышы ретінде анықтауға болады, яғни бұрылу бұрышы θ үшін мына тәуелділік орын алады (21.2-сурет):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}$$

немесе курстың негізгі жорамалдарына байланысты

$$\theta = \frac{dy}{dx}. \quad (21.1)$$



21.2-сурет

Демек, иілген арқалықтың орын ауыстыруын анықтау есебін тек серпімді сызықтың $y = f(x)$ теңдеуін білген жағдайда шешуге болатынын байқаймыз. Жазық иілген арқалық қимасының орын ауыстыруын анықтаудың бірнеше әдісі бар. Соның бірі серпімді

сызықтың дифференциалдық теңдеуіне негізделген. Ол үшін серпімді арқалық қисықтығының (20.6) теңдеуі пайдаланылады:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}.$$

Екінші жағынан, математика курсынан қиманың орын ауыстыруы өте аз шама болғанда, серпімді сызықтың қисықтық радиусы (x, y) координаттар жүйесінде келесі теңдікпенен өрнектеле алады:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Бұл жағдайда иілген арқалық қисықтығының таңбасы координат өстерінің бағытына тәуелділігін естен шығармаған жөн. Егер 21.2-суретте көрсетілгендей, координат өсі x оңға, y өсі жоғары бағытталған деп қабылдасақ, онда арқалық өсінің қисықтығы оң таңбалы, бұл жағдайда иілген арқалықтың дөңестігі төмен қарайды. Егер қабылданған координат жүйесінде иілген арқалықтың дөңестігі төмен қараса, арқалық өсінің қисықтығы оң таңбалы болады, яғни оң таңбалы ию моментіне оң таңбалы, ал теріс таңбалы ию моментіне теріс таңбалы қисықтық сәйкес келеді. Егер қарастырылған координат жүйесіндегі y өсі төмен бағытталса, оң таңбалы ию моментіне теріс таңбалы, ал теріс таңбалы ию моментіне оң таңбалы қисықтық сәйкес келеді.

Енді жоғарыда келтірілген екі теңдеуді салыстыра отырып, қарастырылған координаттар жүйесінде олардың оң бөлігін теңестірсек:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI_z}. \quad (21.2)$$

Бұл теңдеу иілген аралық өсінің жуықтап алынған серпімді сызықтың *дифференциалдық теңдеуі* деп аталады.

Серпімді сызықтың теңдеуін бір рет интегралдайтын болсақ, көлденең қиманың *бұрылу бұрышының* теңдеуін аламыз:

$$EI_z \frac{dy}{dx} = \int M dx + C. \quad (21.3)$$

Ал екінші рет интегралдасақ, біз *иілу шамасының* тендеуін аламыз:

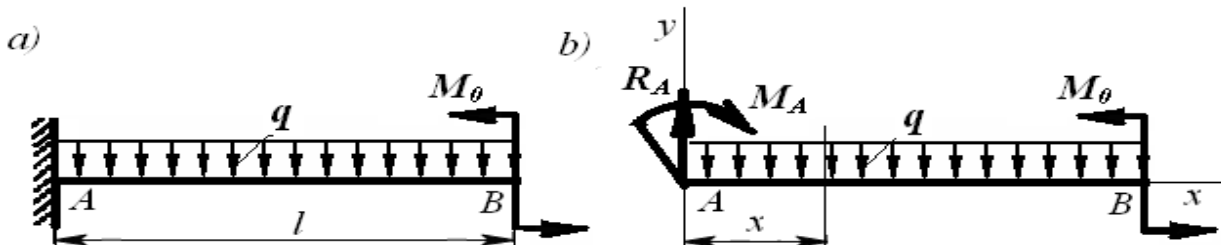
$$EI_z y = \int dx \int M dx + C + D. \quad (21.4)$$

Алынған теңдеулердегі тұрақты шамалар C мен D арқалықтың бекіту шарттары мен оның орналасу жағдайларына байланысты анықталады: егер арқалықтың тек бір ұшы қатаң бекітілген болса, тірек қимасының сызықтық және бұрыштық орын ауыстыруы нөлге тең; егер арқалық қостірекпен бекітілген болса, онда арқалықтың тірек қималарының иілу шамасы нөлге тең; егер арқалықта аралық топса болса, онда ол топсаның оң және сол бөлігінің иілу шамасы мен бұрылу бұрыштары тең. Тұрақты шамалар белгілі болса, (21.3) және (21.4) теңдеулерін пайдаланып, арқалықтың кез келген қимасының бұрылу бұрышы мен иілу шамасын анықтауға болады.

21.1-мысал. Суретте көрсетілген (21.3, *a*-сурет) арқалықтың бос ұшының иілу мөлшері мен бұрылу бұрышын анықтаңыз. $M_0 = 2ql^2$, $q = 10 \text{ кН/м}$, $l = 2 \text{ м}$. Арқалықтың көлденең қимасы № 20 қоставр, $I_z = 1840 \text{ см}^4$ (8239-89 МемСТ). $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

Шешуі: Қарастырылып отырған арқалықтың тірек реакциялары

$$R_A = ql, \quad M_A = -\frac{ql^2}{2} + M_0 = \frac{3ql^2}{2}.$$



21.3-сурет

Координат жүйесінің бас нүктесін арқалықтың қатаң тірегіне сәйкестендіріп аламыз (21.3, *b*-сурет). Кез келген қимадағы ию моменті:

$$M(x) = M_A + R_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}.$$

Серпімді сызық теңдеуі:

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = M_A + R_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}.$$

Осы теңдеуді екі рет интегралдап, арқалықтың бұрылу бұрышы мен иілу мөлшерінің теңдеулерін аламыз:

$$EI_z \frac{dy}{dx} = M_A \cdot x + \frac{R_A \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot x^3}{6} + C.$$

$$EI_z y = \frac{M_A \cdot x^2}{2} + \frac{R_A \cdot x^3}{6} - \frac{q \cdot x^4}{24} + C \cdot x + D.$$

Бекіту шартын қолданып, теңдеулердегі тұрақты шамаларды анықтаймыз, яғни $x = 0$ болғанда, $\theta = 0$ және $y = 0$. Олай болса, $C = 0$ және $D = 0$.

Сонымен, бұрылу бұрышы мен иілу мөлшерінің теңдеулері былайша жазылады:

$$EI_z \frac{dy}{dx} = M_A \cdot x + \frac{R_A \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot x^3}{6},$$

$$EI_z y = \frac{M_A \cdot x^2}{2} + \frac{R_A \cdot x^3}{6} - \frac{q \cdot x^4}{24}.$$

$x = l$ деп алып, арқалықтың бос ұшының бұрылу бұрышы мен иілу мөлшерін анықтаймыз:

$$EI_z \frac{dy}{dx} \Big|_{x=l} = \frac{3ql^2}{2} \cdot l + \frac{ql \cdot l^2}{2} - \frac{ql^3}{6} = \frac{11ql^3}{6} \text{ немесе } \theta_A = \frac{11ql^3}{6EI_z}.$$

$$EI_z y \Big|_{x=l} = \frac{3ql^2 \cdot l^2}{2} + \frac{ql \cdot l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} = \frac{39ql^4}{24} \text{ немесе } y_A = \frac{39ql^4}{24EI_z}.$$

Анықталған шамаларға сан мәндерін енгізіп, бұрылу бұрышы мен иілу мөлшерінің сандық мәндерін есептейміз:

$$\theta_A = \frac{11ql^3}{6EI_z} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,08 \text{ рад},$$

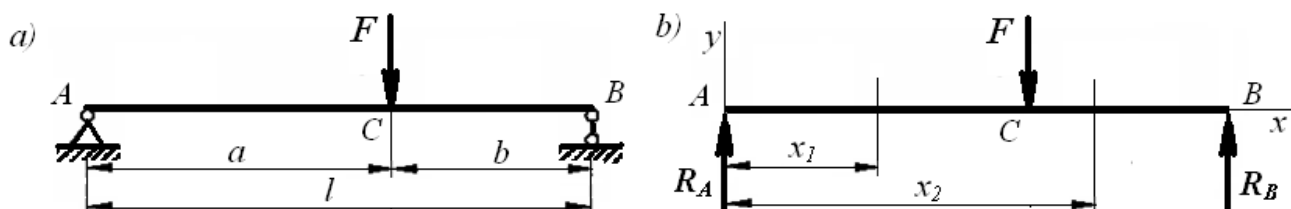
$$y_A = \frac{39ql^4}{24EI_z} = \frac{39 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{24 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,0701 \text{ м}.$$

Сонымен, бұрылу бұрышы мен иілу мөлшері $\theta_A = 0,08 \text{ рад}$, $y_A = 0,0701 \text{ м}$.

21.2-мысал. Суретте көрсетілгендей (21.4, *a*-сурет), қадалған F күшпен жүктелген қос тіректі арқалықтың күш түсу нүктесіндегі иілу мөлшері мен тірек қималарының бұрылу бұрыштарын анықтаңыз.

Шешуі: Тіректің реакциялары арқалықтың тепе-тендік шартынан анықталады және олардың шамалары

$$R_A = \frac{F \cdot b}{l}; \quad R_B = \frac{F \cdot a}{l}.$$



21.4-сурет

Арқалықтың $AC (0 \leq x_1 \leq a)$ және $CB (a \leq x_2 \leq l)$ аралықтарындағы ию моменттері (21.3, *b*-сурет)

$$M_1(x_1) = R_A x_1; \quad M_2(x_2) = R_A x_2 - F(x_2 - a).$$

Аралықтардағы ию моменттерінің өзгеру заңдылығы әртүрлі болғандықтан, серпімді сызықтың теңдеулері де әртүрлі болады:

$$EI_z \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = R_A x_1;$$

$$EI_z \frac{d^2 y_2}{dx_2^2} = R_A x_2 - F(x_2 - a).$$

Теңдеулерді интегралдап, бұрылу бұрышы мен иілу мөлшерінің өрнектерін аламыз.

AC аралығы үшін

$$EI_z \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{R_A x_1^2}{2} + C_1;$$

$$EI_z y_1 = \frac{R_A x_1^3}{6} + C_1 x_1 + D_1;$$

CB аралығы үшін

$$EI_z \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{R_A x_2^2}{2} - \frac{F(x_2 - a)^2}{2} + C_2;$$

$$EI_z y_2 = \frac{R_A x_2^3}{6} - \frac{F(x_2 - a)^3}{6} + C_2 x_2 + D_2.$$

Бұрылу бұрышы мен иілу мөлшерін анықтауға тұрғызылған өрнектерге төрт тұрақты шама кіреді. Оларды анықтағанда арқалықтың ұштары үшін және екі аралықтың шекарасындағы қима үшін түзілетін шарттарды қолданамыз. Арқалықтың сол жағындағы тіректе ($x_1 = 0$) және оң жақтағы тіректе ($x_2 = l$) иілу мөлшері нөлге тең. Алғашқы аралықтың (*AC*) шеткі қимасындағы ($x_1 = a$) бұрылу

бұрышы мен иілу мөлшерінің шамалары екінші аралықтың (CB) бастапқы қимасындағы ($x_2 = a$) бұрылу бұрышы мен иілу мөлшерінің шамаларына тең, яғни

$$y_1|_{x_1=0} = 0; \quad y_2|_{x_2=l} = 0; \quad y_1|_{x_1=a} = y_2|_{x_2=a};$$

$$\frac{dy_1}{dx_1}\bigg|_{x_1=a} = \frac{dy_2}{dx_2}\bigg|_{x_2=a}.$$

Бұрылу бұрышы мен иілу мөлшері теңдеулеріне x -тің сәйкес мәндерін қоямыз

$$x_1 = 0; \quad D_1 = 0,$$

$$x_1 = x_2 = a; \quad \frac{R_A a^2}{2} + C_1 = \frac{R_A a^2}{2} + C_2, \text{ яғни } C_1 = C_2.$$

$$\frac{R_A a^3}{6} + C_1 a = \frac{R_A a^3}{6} + C_2 a + D_2, \text{ мұнан } D_2 = 0.$$

$$x_2 = l; \quad \frac{R_A \cdot l^3}{6} - \frac{F \cdot b^3}{6} + C_2 l = 0, \text{ осыдан } C_2 = -\frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2).$$

$$\text{Сол сияқты, } C_1 = -\frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2).$$

Анықталған тұрақты шамаларды бұрылу бұрышы мен иілу мөлшері теңдеулеріне қоямыз,
AC аралығы үшін:

$$EI_z \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{R_A x_1^2}{2} - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2);$$

$$EI_z y_1 = \frac{R_A x_1^3}{6} - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)x_1,$$

CB аралығы үшін:

$$EI_z \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{R_A x_2^2}{2} - \frac{F(x_2 - a)^2}{2} - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2);$$

$$EI_z y_2 = \frac{R_A x_2^3}{6} - \frac{F(x_2 - a)^3}{6} - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)x_2.$$

Күш түсу нүктесінің иілу мөлшерін AC аралығына тұрғызылған тендеуден анықтаймыз:

$$EI_z y_1|_{x_1=a} = \frac{R_A a^3}{6} - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2) \cdot a = -\frac{Fa^2 b^2}{3l}$$

немесе
$$y_C = -\frac{Fa^2 b^2}{3l}.$$

Тірек қималарының бұрылу бұрыштарын анықтаймыз:

$$EI_z \frac{dy_1}{dx_1} \Big|_{x_1=0} = -\frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2) \text{ немесе } \theta_A = -\frac{Fb}{6EI_z l}(l^2 - b^2);$$

$$EI_z \frac{dy_2}{dx_2} \Big|_{z_2=l} = \frac{R_A l^2}{2} - \frac{F(l-a)^2}{2} - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2) = \frac{Fb}{6l}(la - l^2 + b^2)$$

немесе

$$\theta_B = \frac{Fb}{6EI_z l}(la - l^2 + b^2)$$

Сонымен, ізденді бұрылу бұрыштары мен иілу мөлшері:

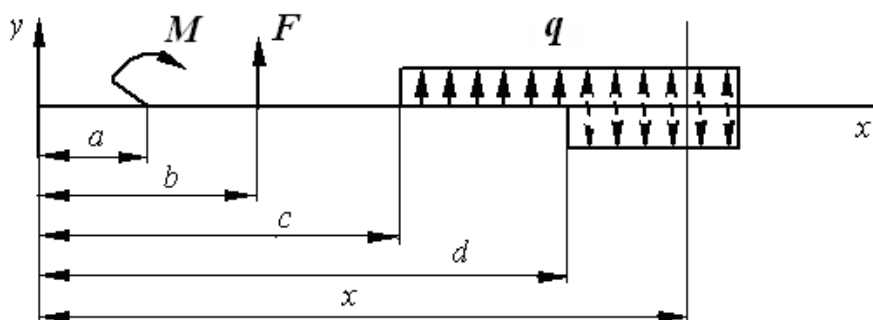
$$\theta_A = -\frac{Fb}{6EI_z l}(l^2 - b^2), \quad \theta_B = \frac{Fb}{6EI_z l}(la - l^2 + b^2), \quad y_C = -\frac{Fa^2 b^2}{3l}.$$

21.2. Арқалықтың орнын ауыстыруларын бастапқы параметрлер әдісімен анықтау

Күрделі жүктелген арқалықтар қималарының орын ауыстыруын серпімді сызықтың дифференциалдық теңдеуін қолданып анықтау қиындық туғызады. Бұл қиындық дифференциалдық теңдеулерді құруда емес, интегралдаудың тұрақтыларын анықтау тәсілінде және сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешуде. Мысалы, егер арқалық жүктелу сипатына байланысты n аралыққа жіктелсе, онда барлық аралықтың дифференциалдық теңдеулерін интегралдау $2n$ кезкелген тұрақтыларға әкеледі. Осы тұрақтыларды анықтауға, арқалықтың негізгі екі тірек шарттарына серпімді сызықтың барлық аралықтарының $2(n-1)$ үзіліссіз және жатық түйісу шарттарын қосып, $2n$ теңдеулерді тұрғызу керек.

Қазіргі заманда интегралдаудың кез келген тұрақтыларын анықтауда туындайтын көптеген есептеулерді азайту үшін бірқатар тәсілдер құрылды. Оған серпімді сызық аралықтары қанша болса да, екі тұрақтыны – координаттар жүйесінің бас нүктесіндегі иілу мен бұрылу бұрышын анықтауға келтіретін бас параметрлер әдісі жатады. Бастапқы параметрлер әдісі бойынша, иілген арқалықтың орын ауыстыруларын анықтау үшін, иілу өсінің әмбебап теңдеуін құруда келесі талаптар қойылады:

a) арқалықтың екі ұшының бірін координаттар жүйесінің бас нүктесі ретінде қабылдап y өсін жоғары, x өсін арқалықтың бойлық өсімен бағыттау қажет (21.5-сурет);



21.5-сурет

b) кез келген қимадағы ию моментінің өрнегін құрғанда, координаттар жүйесінің бас нүктесі мен сол қиманың арасындағы сыртқы күштер міндетті түрде түгел ескерілуге тиіс;

с) июші моменттің өрнегіндегі сыртқы қадалған момент 1-ге тең $(x-a)^0$ иінге көбейтіледі;

д) белгілі бір заңдылықпен үздіксіз таралған күш x -тің қандай да бір мәнінде үзілсе (мысалы, $x=d$), онда оны қарастырған қимаға дейін сол заңдылықпен өзара тең, бағыттары қарама-қарсы таралған күштермен жалғастыру керек (21.5-сурет).

е) көрсетілген талаптарды орындай отырып құрылған, кез келген қимадағы июші моменттің өрнегін (21.1) теңдеуіне қойып, екі рет ойша интегралдау қажет.

Бұл интегралдаулардан алынған өрнектердің жалпы түрі төмендегідей болады:

$$EI_z \frac{dy}{dx} = EI_z \theta_0 + M(x-a) + \frac{F(x-b)^2}{2} + \frac{q(x-c)^3}{6} - \frac{q(x-d)^3}{6};$$

$$EI_z y = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x + \frac{M(x-a)^2}{2} + \frac{F(x-b)^3}{6} + \frac{q(x-c)^4}{24} - \frac{q(x-d)^4}{24}. \quad (21.5)$$

Мұндағы: y_0, θ_0 – бастапқы параметрлер; y_0 – серпімді сызығының координаттар жүйесінің басындағы иілу мөлшері; θ_0 – иілу өсіне, координаттар жүйесінің бас нүктесі арқылы жүргізілген жанама мен абсцисса өсінің арасындағы бұрыш.

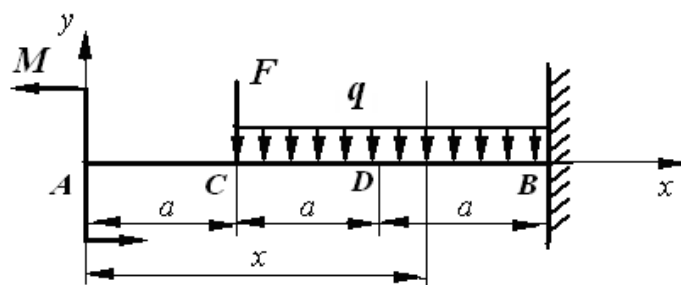
(21.5) теңдеулері *иілу өсінің әмбебап теңдеулері* деп аталады.

Бұл теңдеулер, негізінен, көлденең қималарының қатаңдығы тұрақты иілген аралықтардың деформациясын анықтауға пайдаланылады.

21.3-мысал. Суретте көрсетілген (21.6-сурет) көлденең қимасының қатаңдығы тұрақты, аралықтың C қимасының бұрылу бұрышы мен D қимасындағы иілу мөлшерін анықтаңыз. $F = qa$; $M = qa^2 / 2$.

Шешуі: Координаттар жүйесінің бас нүктесі ретінде аралықтың сол жақ ұшын қабылдап, y пен x өстерін жүргіземіз (21.6-сурет). Координаттар жүйесінің бас нүктесіне қатысты шеткі қима бірқалыпты таралған күш аралығында болады. Бұл қимадағы ию моментінің өрнегі

$$M(x) = -Mx^0 - F(x-a) - \frac{q(x-a)^2}{2}.$$



21.6-сурет

Арқалықтың иілу өсінің универсал теңдеулері:

$$EI_z \theta = EI_z \theta_0 - Mx - \frac{F(x-a)^2}{2} - \frac{q(x-a)^3}{6};$$

$$EI_z y = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x - \frac{Mx^2}{2} - \frac{F(x-a)^3}{6} - \frac{q(x-a)^3}{24}.$$

Бастапқы параметрлерді анықтау үшін, тірек шарттарын қолданады, $x = 3a$, $y_B = 0$; $\theta_B = 0$ (арқалықтың оң ұшы қатаң бекітілгендіктен):

$$EI_z \theta_B|_{x=3a} = EI_z \theta_0 - \frac{qa^2 \cdot 3a^2}{2} - \frac{qa \cdot 4a^2}{2} - \frac{q8a^3}{6} = 0;$$

$$EI_z y_B|_{x=3a} = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 3a - \frac{qa^2 9a^2}{4} - \frac{qa8a^3}{6} - \frac{16qa^4}{24} = 0.$$

Бұл өрнектерден

$$\theta_0 = \frac{49qa^3}{12EI_z}; \quad y_0 = -\frac{87qa^4}{12EI_z}.$$

Демек, арқалықтың бұрылу бұрышы мен иілу мөлшерінің жалпы теңдеулері

$$EI_z \theta = \frac{49qa^3}{12} - Mx - \frac{F(x-a)^2}{2} - \frac{q(x-a)^3}{6};$$

$$EI_z y = -\frac{87qa^4}{12} + \frac{49qa^2}{12}x - \frac{Mx^2}{2} - \frac{F(x-a)^3}{6} - \frac{q(x-a)^4}{24}.$$

C қимасының бұрылу бұрышы

$$EI_z \theta_C|_{x=a} = \frac{49qa^4}{12} - \frac{qa^2}{2} = \frac{43qa^3}{12},$$

бұдан $\theta_C = \frac{43qa^3}{12EI_z}$.

D нүктесінің иілу мөлшері

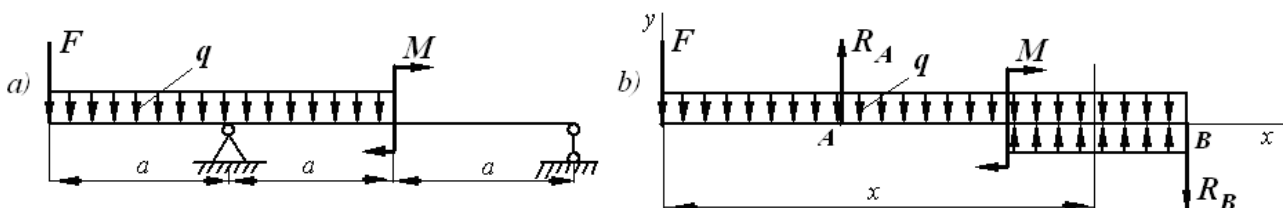
$$EI_z y_D|_{x=2a} = -\frac{87qa^4}{12} + \frac{49qa^3}{12} \cdot 2a - \frac{qa^2 \cdot 4a^2}{2} - \frac{qa \cdot a^3}{6} - \frac{qa^4}{24} = -\frac{31qa^4}{24};$$

$$y_D = -\frac{31qa^4}{24EI_z}.$$

21.4-мысал. Екі прокатты №24 а швеллерден құрылып иілген арқалықтың серпімді өсін тұрғызу керек (21.7, a -сурет). Егер арқалықтың ең үлкен иілу мөлшері $f < l/200$ болса, қиманың екпін моменті қандай болуы керек? $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $q = 30 \text{ кН/м}$; $F = 2qa$; $M = qa^2$; $a = 2 \text{ м}$.

Шешуі: Қарастырылып отырған арқалықтың реакциялары

$$R_A = \frac{9qa}{2}; R_B = \frac{qa}{2}.$$



21.7-сурет

Координаттар жүйесінің бас нүктесі ретінде арқалықтың сол ұшын қабылдасақ (21.7, *b*-сурет), иілу өсінің әмбебап теңдеулері төмендегідей болады:

$$EI_z \theta = EI_z \theta_0 + M(x-2a) - \frac{Fx^2}{2} + \frac{R_A(x-a)^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + \frac{q(x-2a)^3}{6};$$

$$EI_z y = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x + \frac{M(x-2a)^2}{2} - \frac{Fx^3}{6} + \frac{R_A(x-a)^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + \frac{q(x-2a)^4}{24}.$$

Бас параметрлер келесі шарттардан анықталады:

$$x = a; y_A = 0; x = 3a; y_B = 0,$$

себебі, бұл қималарда тіректер орналасқан.

$$EI_z y_A|_{x=a} = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 a - \frac{Fa^3}{6} - \frac{qa^4}{24} = 0;$$

$$EI_z y_B|_{x=3a} = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 3a + \frac{Ma^2}{2} - \frac{27Fa^3}{6} + \frac{8R_A a^3}{6} - \frac{81qa^4}{24} + \frac{qa^4}{24} = 0.$$

Теңдеулерді шеше отырып, бас параметрлерді анықтаймыз

$$\theta_0 = \frac{113qa^3}{48EI_z}; y_0 = -\frac{104qa^4}{48EI_z}.$$

Анықталған бас параметрлерді жоғарыда келтірілген теңдеуге қойсақ,

$$EI_z \theta = \frac{113qa^3}{48} + M(x-2a) - \frac{Fx^2}{2} + \frac{R_A(x-a)^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + \frac{q(x-2a)^3}{6};$$

$$EI_z y = -\frac{104qa^4}{48} + \frac{113qa^3}{48}x + \frac{M(x-2a)^2}{2} - \frac{Fx^3}{6} + \frac{R_A(x-a)^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + \frac{q(x-2a)^4}{24}.$$

Арқалықтың серпімді өсін тұрғызу үшін $x = \frac{a}{2}, \frac{3a}{2}, 2a, \frac{5a}{2}$ сәйкес нүктелердің иілу мөлшерін анықтаймыз:

$$EI_z y \Big|_{x=\frac{a}{2}} = -\frac{104qa^4}{48} + \frac{113qa^4}{96} - \frac{Fa^3}{48} - \frac{qa^4}{384} = -\frac{397qa^4}{384};$$

$$EI_z y \Big|_{x=\frac{3a}{2}} = -\frac{104qa^4}{48} + \frac{339qa^4}{96} - \frac{27Fa^3}{48} + \frac{R_A a^3}{48} - \frac{81qa^4}{384} = \frac{47qa^4}{384};$$

$$EI_z y \Big|_{x=2a} = -\frac{104qa^4}{48} + \frac{226qa^4}{48} - \frac{F8a^3}{6} + \frac{R_A a^3}{6} - \frac{16qa^4}{4} = -\frac{qa^4}{24};$$

$$EI_z y \Big|_{x=\frac{5a}{2}} = -\frac{104qa^4}{48} + \frac{565qa^4}{96} + \frac{Ma^2}{8} - \frac{125Fa^3}{48} + \frac{27R_A a^3}{48} - \frac{625qa^4}{384} + \frac{qa^4}{384} = -\frac{22qa^4}{48}.$$

Бұл шамалардағы $I_z = 2 \cdot 3180 = 6360 \text{ см}^4 = 0,636 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ (прокат сортаменттердің арналу кестесінен 8240-89 МемСТ №24 a швеллердің екпін моменті $I_z = 3180 \text{ см}^4$)

Сан мөлшерін қойсақ, мыналар шығады:

$$y \Big|_{x=1\text{м}} = -0,039 \text{ м}; \quad y \Big|_{x=3\text{м}} = 0,0046 \text{ м};$$

$$y \Big|_{x=4\text{м}} = -0,0016 \text{ м}; \quad y \Big|_{x=5\text{м}} = 0,017 \text{ м}.$$

Иілу мөлшерінің анықталған мәндері бойынша серпімді өсті тұрғызамыз (21.7, *b*-сурет).

Есептеу бойынша ең үлкен иілу мөлшерінің абсолют шамасы

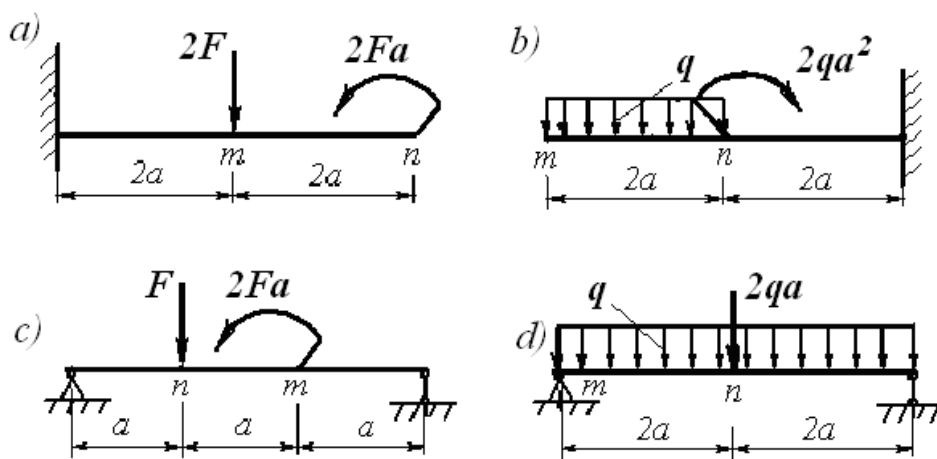
$$f = \frac{104qa^4}{48EI_z}.$$

Олай болса, қиманың қажетті екпін моменті

$$I_z = \frac{104 \cdot 200 \cdot qa^4}{48 \cdot 2 \cdot l \cdot E} = 13000 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 13000 \text{ см}^4.$$

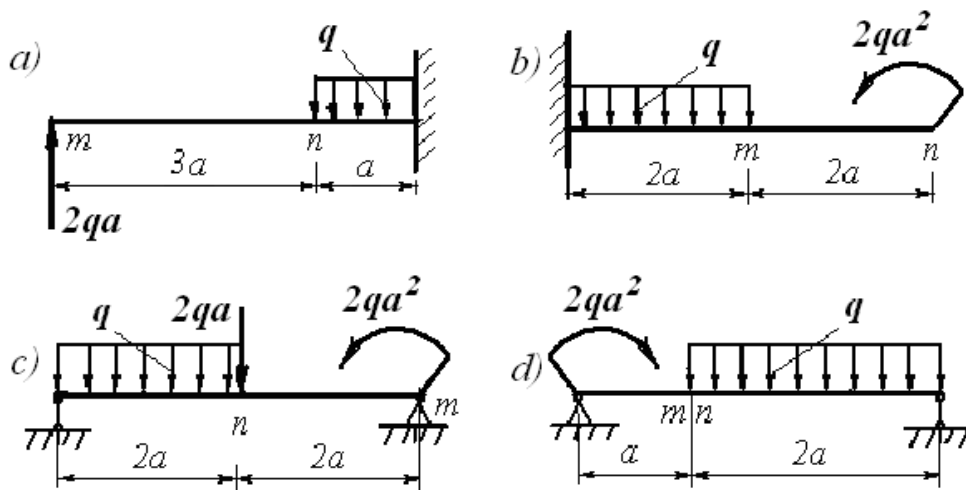
Жаттығу есептері

1-есеп. Арқалықтардың қимасының қатандығын тұрақты деп есептеп, тікелей интегралдау әдісімен n қимасының иілу мөлшерін және m қимасының бұрылу бұрышын анықтаңыз (1-сурет).



1-сурет

2-есеп. Арқалықтардың қимасының қатандығын тұрақты деп есептеп, алғашқы параметрлер әдісімен n қимасының иілу мөлшерін және m қимасының бұрылу бұрышын анықтаңыз (2-сурет).



2-сурет

Қайталау сұрақтары:

1. Иілген арқалықтың дифференциалдық теңдеуін тұрғызыңыз және қиманың орын ауыстыруын тікелей интегралдау әдісімен анықтаудың ретін көрсетіңіз.
2. Алғашқы параметрлер әдісін қолданғандағы интегралдау тұрақтыларының геометриялық мәнісі неде?
3. Алғашқы параметрлер әдісінің мәнісі неде?
4. Алғашқы параметрлер әдісінің қималардың бұрылу бұрыштары мен иілістің әмбебап теңдеуін түзеңіз.
5. Алғашқы параметрлерді анықтау ретін көрсетіңіз.
6. Алғашқы параметрлер әдісімен кез келген қималардың бұрылу бұрыштары мен иілістері қалай анықталады?

22-тарау. БЕРІКТІК ТЕОРИЯЛАРЫ

22.1. Беріктік теориясының мәселелері

Инженерлік есептеулердің ең маңызды мәселесі – конструкция элементтері мен машина тетіктерін белгілі кернеулі күй, яғни нүктедегі белгілі бас кернеулер бойынша беріктігін бағалау. Мұндай мәселелер қарапайым деформациялар үшін жеңіл шешіледі, мысалы, сызықты кернеулі күй үшін, өйткені бұл жағдайда шектік (қауіпті) кернеудің шамасын эксперименттік жолмен жеңіл анықтауға болады. Бізге белгілідей, *қауіпті кернеу* деп дененің қирай бастау немесе қалдық деформацияның түзелу (материалдың пластикалық күй жағдайында) мезетіне тиісті кернеуді атайды.

Пластикалық материал үшін, қауіпті күйдің басталуына сәйкес келетін қауіпті кернеу – аққыштық шегі (σ_y), морт материал үшін – беріктік шегі (σ_u). Бұл механикалық сипаттамалар материалдардың қарапайым созу, сығу диаграммаларынан алынады.

Қауіпті кернеулер бойынша мүмкіндік кернеулер тағайындалады: созылуда $-\left[\sigma_t\right]$, сығылуда $-\left[\sigma_c\right]$. Сонда сызықтық кернеулі күйге мынадай беріктік шарты түзеледі

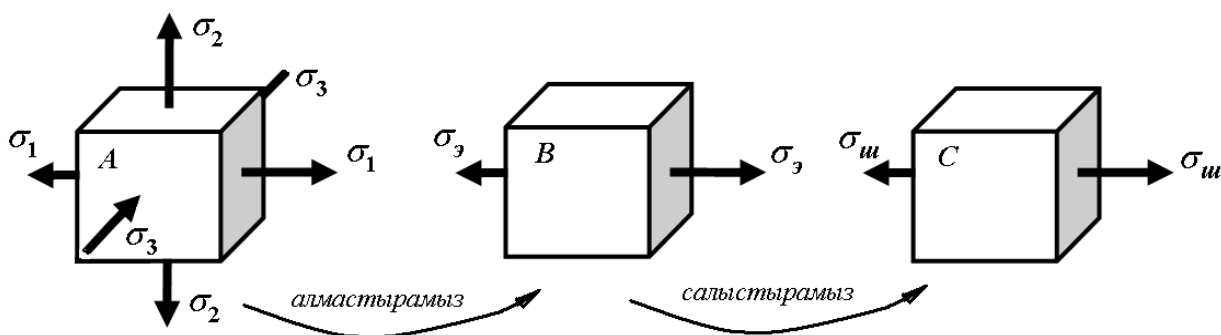
$$\sigma_1 \leq \left[\sigma_t\right], \sigma_3 \leq \left[\sigma_c\right].$$

Енді күрделі кернеулі күйдегі, яғни конструкция элементтерінің кез келген нүктелері жазық немесе көлемдік кернеулі күйдегі жағдайын қарастырайық.

Күрделі қарсыласу жағдайында, тәжірибе көрсететіндей, берілген материалдың қауіпті күйі бас кернеулердің өзара қатынастарына байланысты әртүрлі шектік мәнде орын алуы мүмкін. Бас кернеулердің арасындағы қатынастың мүмкіндік комбинация саны айтарлықтай аса көп болғандықтан, олардың шектік мәндерін тікелей эксперименттік жолмен анықтау өте күрделі және тым көп еңбекті талап етеді. Сондықтан күрделі қарсыласу жағдайында қауіпті кернеуді анықтау үшін, материалдың беріктігін қамтамасыз ететін шешуші фактордың, атап айтқанда, қайсысы болатындығын аңғарарлық *беріктік жорамалдарға* жүгінуіміз қажет. Демек,

материалдың қауіпті күйі қабылданған фактор шамасының қандай да бір шекті мәніне жеткенде болатыны болжанады. Бұл мән материалдарды қарапайым деформацияға сынау негізінде анықталады. Жеке факторлар ретінде тік және жанама кернеулер, салыстырмалы деформация, деформацияның меншікті потенциалдық энергиясы т.б. факторлар қабылданады.

Беріктік жорамалдары материалдардың күрделі кернеулі күйлерін қарапайым сызықты кернеулі күймен салыстыруға мүмкіндік береді, яғни кез келген қауіпті күрделі кернеулі күйлердің (A) қарапайым кернеулі күймен (B) эквиваленттігі орнатылады. Мұнан кейін эквивалентті кернеулі күйді осыған ұқсас шектік кернеулі күймен салыстырып материалдың беріктігі тексеріледі (22.1-сурет). Барлық кернеулерін пропорционал өсіргенде қауіпті күйге қатар жететін екі кернеулі күйдің қауіптілігі мен беріктігінің өзара бірдей екендігін көрсетеді.



22.1-сурет

Демек, күрделі кернеулі күймен қауіптілігі бірдей болатын бірөстік созылудың шартты кернеуін *эквивалентті кернеу* деп атаймыз.

Беріктік жорамалдары негізінде эквивалентті кернеулерді анықтайтын формулалар қорытып шығарылады да, кейін созылу мүмкіндік кернеуімен салыстырылады. Сонымен, көлденең қимада тік және жанама кернеулер әсер ететін күрделі кернеулі күйдің беріктік шартының түрі мынадай болады:

$$\sigma_{\text{экр}} \leq [\sigma]. \quad (22.1)$$

Ғылыми түрде негізделген беріктік жорамалдарын **беріктік теориялары** деп те атайды. Біз оның кейбірін ғана қарастырамыз.

22.2. Беріктік теориялары

Ең үлкен тік кернеу жорамалына негізделген *бірінші беріктік теориясы* және ең үлкен сызықтық деформация жорамалына негізделген екінші беріктік теориясы қазіргі уақытта қолданбайтындықтан, оларды қарастырмаймыз.

Қазіргі уақытта қолданылатын беріктік теорияларына тоқталайық.

1. **Ең үлкен жанама кернеу жорамалы (үшінші беріктік теориясы)**. Үшінші болжам бойынша материалдың қауіпті кернеулі күйі туындауының негізгі себебі олардың қимасында пайда болатын ең үлкен жанама кернеумен байланысты болады. Сондықтан оны **ең үлкен жанама кернеулер теориясы** деп атайды.

16 тарауда (16.7) бір өсті созылған стерженьнің көлбеу қимасындағы ең үлкен жанама кернеу тік кернеудің жартсына тең екенін орнатқанбыз. Олай болса, шектік жанама кернеу шектік тік кернеудің жартсына тең:

$$\tau_o = \frac{1}{2} \sigma_o.$$

Сол тарауда жазық кернеулі күй үшін ең үлкен жанама кернеу бас кереулердің айырымының жартсына тең екен көрсетілді

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Үшінші теория бойынша эквивалентті кернеуді есептейтін формуланы қорытып шығару үшін көлденең қимасында тік және жанама кернеулер туындайтын білеуді қарастырайық (22.2, *a*-сурет).

Білеудің ішінен қандайда бір B нүктесі аймағынан abc призмасын кесіп алайық, оның ab қыры көлденең қимамен, ac қыры – бойлық қимамен сәйкес келсін, ал bc қыры, бас кернеу σ_0 әсер ететін, бас жазықтық болсын. Жанама кернеудің жұптық заңына

сәйкес призманың ac қырында да жанама кернеу әсер етеді (22.2, b -сурет). Бойлық қимаға тік кернеу әсер етпейді, демек, біз ықшамдалған жазық кернеулі күйді қарастырамыз.

abc призмасына әсер ететін барлық күштерді x және y өстеріне проекциялап, призманың тепе-теңдігін қарастырамыз:

$$\sum X = 0; \quad \sigma_0 dA \sin \alpha - \sigma dA \sin \alpha - \tau dA \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad \tau dA \cos \alpha - \tau dA \sin \alpha = 0.$$

Теңдіктердің ек жағын dA -ға қысқартамыз:

$$(\sigma_0 - \sigma) \sin \alpha = \tau \cos \alpha; \quad \sigma_0 \cos \alpha = \tau \sin \alpha.$$

Екі теңдікті $\cos \alpha$ -ге бөлеміз және олардан $\operatorname{tg} \alpha$ -ні жойып

$$\frac{\tau}{\sigma_0 - \sigma} = \frac{\sigma_0}{\tau}$$

өрнегін аламы, ол квадрат теңдеумен парапар

$$\sigma_0^2 - \sigma_0 \cdot \sigma - \tau^2 = 0.$$

Бұл квадраттық теңдеудің σ_0 қатысты, мынадай шешімдері бар

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Сонымен, білеудің B нүктесі аймағындағы көлбеу жазықтықтардағы бас кернеулер былайша анықталады

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (22.2)$$

Демек, ең үлкен жанама кернеулер

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (22.3)$$

Шектік жанама кернеу $\tau_o = \frac{1}{2} \sigma_o$, ал эквиваленттік кернеу шектік шамадан аспайтын болғандықтан, ең үлкен жанама кернеулер жорамалын қолдана отырап

$$\tau_{\max} = \tau_o = \frac{\sigma_o}{2} = \frac{\sigma_{\text{экв}}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

өрнегін түзейміз.

Нәтижесінде эквиваленттік кернеуді есептейтін формуланы аламыз

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (22.4)$$

Бұл жағдайда беріктік шарты былайша тұрғызылады

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (22.5)$$

Бұл беріктік теориясы кеңінен қолданылады, өйткені ол іс жүзінде пластикалық материалдар үшін тәжірибе нәтижелерімен жақсы үйлеседі, ал морт материалдар үшін ол жарамсыз.

2) **Меншікті пішін өзгерту потенциал энергиясы жорамалы (төртінші немесе энергетикалық беріктік теориясы)**. Дененің элементар бөлігі деформацияланғанда оның пішіні мен оның көлемі өзгереді. Демек, деформацияның толық потенциал энергиясы екі бөлімнен тұрады: пішін өзгерту энергиясынан және көлем өзгерту энергиясынан. XX ғасырда ұсынылған беріктіктің энергетикалық жорамалы материалдың шектік күйге өтуін **пішін өзгерту энергиясымен** байланыстырады.

Осы жорамалға сәйкес, *берілген нүктеде материалдың қауіпті күйі осы нүктенің меншікті пішін өзгерту потенциал энергиясының шамасы қауіпті шегіне жеткенде туындайды.*

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (22.6)$$

Осы теорияның беріктік шарты былайша жазылады

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (22.7)$$

Бұл беріктік теориясын іс жүзінде пластикалық материалдарға қолдануға болады, ал морт материалдарға қолдануға болмайды.

Бұл жерде үшінші және төртінші теория негізіндегі есептеу нәтижелерінің айырмашылығы өте елеусіз екендігін атап өткен жөн.

3) **Мор жорамалы (бесінші беріктік теориясы)**. Мор К.О. (1835-1918) –материалдар кедергісі және құрылыс механика ілімдерінің неміс ғалымы. Беріктік теорияларының бірін, күрделі кернеулі күй жағдайындағы материалдың кернеулерін анықтаудың графикалық тәсілін құрушы және т.б.

Мор жорамалы ХХ ғасырдың басында ұсынылған. Осы жорамалға сәйкес, *материалдың қауіпті күйі қандай да бір жазықтықта тік және жанама кернеулердің ең қолайсыз комбинациялары қалыптасқанды туындайды.*

Эквивалентті кернеуді есептеу формуласы

$$\sigma_{\text{экв V}} = \frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (22.8)$$

мұндағы $k = [\sigma_t]/[\sigma_c]$, беріктік шарты

$$\sigma_{\text{экв V}} = \frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (22.9)$$

Бұл беріктік теориясын пластикалық және морт материалдарға қолдануға болады.

Қайталау сұрақтары:

1. Беріктік жорамалдары не үшін керек?
2. Шектік жағдайдың классикалық жорамалдарын атаңыз. Олар шектік жағдайдың қандай шарттарын ұсынады?
3. Өртүрлі жорамалдармен беріктік шарттарын жазыңыз.
4. Қандай жағдайларда үшінші және төртінші классикалық жорамалдарды қолданады?
5. Қандай жағдайларда шектік жағдайлардың басқа да жорамалдарын қолдануға болады?

23-тарау. КҮРДЕЛІ ҚАРСЫЛАСУ

23.1. Негізгі түсініктер

Алдыңғы тарауларда созылу, сығылу, ығысу, бұралу, жазық иілу сияқты сызықты қарапайым деформациялармен таныстық. Қарапайым деформацияланған стерженьнің кез келген қимасында пайда болатын ішкі фактордың саны бірге тең (мысалы, созылғанда тек бойлық күш, бұралғанда тек бұраушы момент пайда болады). Иілген арқалықтың көлденең қималарында ию моментімен қатар көлденен күш пайда болғанмен, көлденең күш ескерілмейді. Өйткені оның арқалық беріктігіне әсері ию моментінің әсеріне қарағанда жоқтың қасы.

Инженерлік практикада қарапайым деформацияланған конструкция элементтерінен гөрі, күрделі деформацияланған (күрделі қарсыласатын) элементтер жиі кездеседі. **Күрделі қарсыласу** деп стерженьнің алдында қарастырылған қарапайым кернеулі күйлердің әртүрлі комбинацияларын айтамыз.

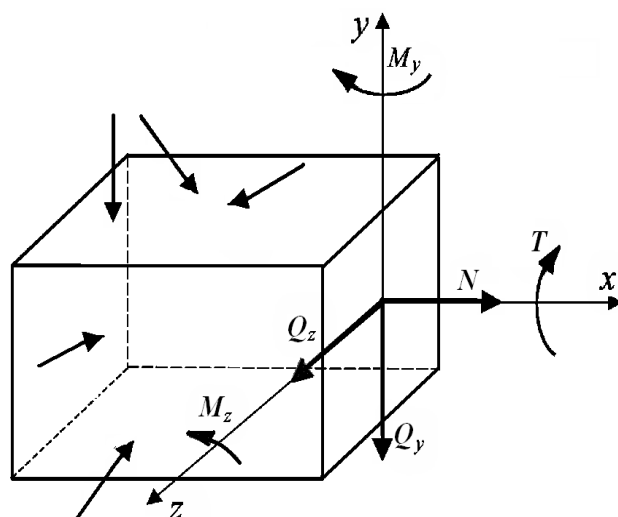
Стерженьді жалпылама жүктегенде, көлденең қимада ішкі күш әсерінің алты компоненті туындайды (23.1-сурет): N – көлденең қимаға перпендикуляр бойлық өс бойымен әсер ететін *бойлық күш*; Oy және Oz өстеріне параллель әсер ететін Q_y, Q_z – *көлденең күштер*; M_z, M_y – *ию моменттері*, Oz және Oy өстеріне қатысты моменттер; T – *бұрау моменті*, бойлық өске қатысты момент.

Ішкі күш әсерлерінің комбинацияларының түрлеріне қатысты күрделі қарсыласу былайша жіктеледі:

1. **Қиғаш иілу.** Қиғаш иілген элементтің көлденең қималарында Q_y, Q_z, M_z, M_y ішкі факторлары пайда болады.

2. **Центрден тыс созылу (сығылу).** Центрден тыс созылған (сығылған) элементтердің көлденең қималарында M_z, M_y ию моменттерімен қатар N бойлық күш пайда болады. Жеке жағдайларда ию моменттерінің бірі нөлге тең болуы мүмкін.

3. **Иіліп бұралу.** Иіліп бұралған стерженьнің қималарында Q_y, Q_z көлденен күштері мен M_z, M_y ию, T бұраушы моменттері пайда болады.



23.1-сурет

Жалпы жағдайда стерженьдердің көлденең қималарында кез келген ішкі факторлар пайда болуы мүмкін.

Барлық жағдайда деформацияның шамасы аздау және Гук заңына тәуелді болғанда, күш әсерінің тәуелсіздігі туралы принцип орындалады.

Күрделі қарсыласатын конструкция элементтерін беріктікке есептеу тәртібі қарапайым деформацияланған элементтерді есептеу тәртібімен бірдей. Алдымен ішкі күш әсерлерінің эпюралары тұрғызылып, қауіпті қима, одан кейін қауіпті қимадағы кернеулердің эпюралары тұрғызылып, қауіпті нүкте анықталады. Берілген беріктік теориясы бойынша қауіпті нүкте үшін беріктік шарты құрылып, элементтің беріктігі толық тексеріледі.

Кейде ішкі күш әсерлерінің эпюралары бойынша бірнеше қиманың қауіптілігі жобалас болуы мүмкін. Мұндай жағдайларда конструкция элементінің беріктігі, қауіптілігі жобалас әр қима бойынша жеке тексеріледі.

Күрделі қарсыласатын элемент беріктікке есептелгенде, N , Q_y , Q_z ішкі күштері көп жағдайларда ескерілмей, ішкі моменттер ғана ескеріледі. Беріктік теориясы деформацияланған материалдың күйіне, қасиетіне байланысты қабылданады.

Пластикалық материалдардың беріктігі – үшінші немесе төртінші, ал морт материалдардың беріктігі бесінші теория бойынша тексеріледі.

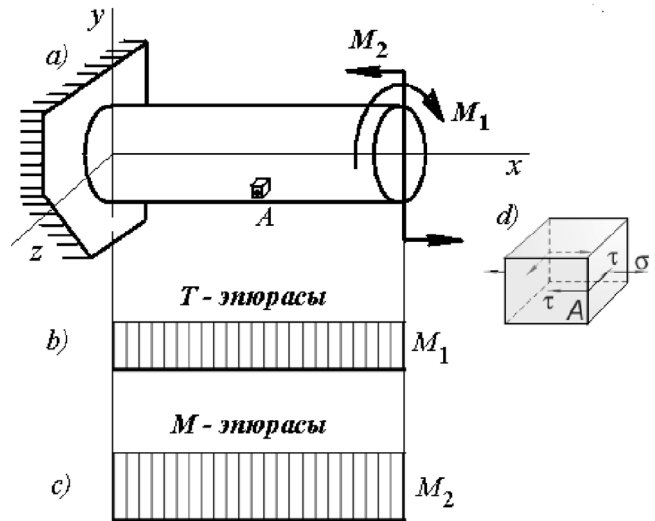
Күрделі қарсыласудың жеке түрімен танысайық

23.2. Иіліп бұралу

Кең тараған машина бөлшектерінің бірі, машина біліктерін есептегенде, күрделі кернеулі күй туғызатын, ию және бұрау моменттерінің біріккен әсерін байқауға болады.

Екі қоскүшпен жүктелген болат көлденең қимасы дөңгелек білеуді қарастырайық (23.2, *a*-сурет). Бірінші қоскүштің әсер ету жазығы білеу өсіне перпендикуляр, ал екіншісінің әсер ету жазығы білеудің өсінен өтетін болсын. Онда бірінші қоскүштің моменті M_1 білеуді бұрайды, ал екінші қоскүштің моменті M_2 арқалықты иеді. Арқалықты бұлайша жүктегенде, көлденең қимасында екі ішкі күш факторы пайда болады – бұрау моменті T , ию моменті M . Арқалықтың ұзына бойындағы ішкі күштер $T = M_1$, $M = M_2$ (23.2, *b*, *c*-сурет).

Бұралған білеудің көлденең қимасындағы ең үлкен жанама кернеу білеу өсінен шалғай жатқан нүктеде, ал иілген білеудің көлденең қимасындағы ең үлкен тік кернеу бейтарап өстен шалғай нүктеде туындайтыны бізге белгілі. Олай болса, берілген білеудегі (23.2, *a*-сурет) ең қауіпті кернеулі күй x өсінен шалғайдағы нүктелерде болады. Сондай нүктелердің бірін (A нүктесі), төртбұрышты параллелепипед түріндегі элементті жеке бөліп алып қарастырайық (23.2, *d*-сурет). Сонда біз A нүктесінің кернеулі күйі білеудің көлденең қимасымен сәйкес келетін элементтің беттеріне әсер етуші σ тік кернеумен және осы беттермен оларға перпендикуляр беттерде (жанама кернеудің жұптық заңы) әсер ететін τ жанама кернеумен сипатталатынын көреміз. Бұл σ мен τ – қарастырылып отырған қимадағы ең үлкен тік және жанама кернеулер. Олардың шамаларын тиісінше келесі формулалармен анықтаймыз:



23.2-сурет

$$\sigma = \frac{M}{W_z}, \quad \tau = \frac{T}{W_\rho}.$$

Берілген қима үшін $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$, $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$, олай болса $W_\rho = 2W_z$.

Демек,

$$\tau = \frac{T}{2W_z}.$$

Біліктің беріктігін тексеру үшін, эквивалентті кернеу қарастырылып отырған қимадағы ең үлкен σ мен τ кернеулерімен өрнектелген үшінші (22.25) және төртінші (22.27) беріктік теориясын пайдаланамыз:

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Енді σ мен τ кернеулерінің орнына жоғарыда анықталған олардың мәнімен алмастырсақ, үшінші мен төртінші беріктік шарттары келесі түрде өрнектеледі:

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (23.1)$$

және

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T^2}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (23.2)$$

Сонымен, иіліп бұралған білеуді есептегенде, эквивалентті кернеуді білеудің қауіпті қимасында туындайтын ию және бұрау моменттері арқылы анықтауға болады.

(23.1) және (23.2) формулаларының алымындағы түбірдің арифметикалық мәнін *эквивалентті* немесе *келтірілген момент* деп атайды және $M_{\text{экв}}$ деп белгілейді.

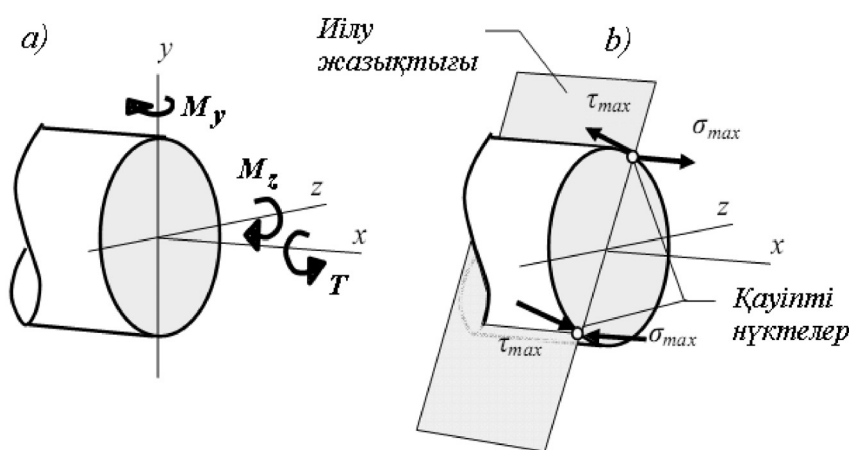
$$M_{\text{эквIII}} = \sqrt{M^2 + T^2} \quad \text{және} \quad M_{\text{эквVI}} = \sqrt{M^2 + 0,75T^2}. \quad (23.3)$$

Бұл белгілеулерді қолдана отырып, беріктік шартын жалпы түрге келтіруге болады

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (23.4)$$

Кеңістікті бұралып иілген біліктің көлденең қимасында M_z , M_y ию моменттері мен T бұрау моменті туындайды (23.3, *a*-сурет) және кейбір жағдайларда Q_z , Q_y көлденең күштер де туындайды. Көлденең күштерді ескермейміз. Біз тек бұралып иілген дөңгелек білікті қарастырамыз. M_z , M_y ию моменттерін әр уақытта көлбеу жазықтықта әсер ететін, олардың геометриялық қосындысы тең бір июші моментпен алмастыруға болады:

$$M_u = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$



23.3-сурет

Осы момент жатқан жазықтықтың көлденең қиманың қарамымен қиылысу нүктесі қауіпті нүкте болып табылады (23.3, *b*-сурет). Бұл нүктеде абсолют шамасы ең үлкен тік σ_{max} және жанама τ_{max} кернеулер туындайды.

$$\sigma_{max} = \frac{M_u}{W_z}, \quad \tau_{max} = \frac{T}{W_\rho}.$$

Сондықтан кеңістікте жүктелген білікті есептеуге беріктік теорияларын қолдану қажет

$$\sigma_{экв III} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4\tau_{max}^2} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{экв IV} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} \leq [\sigma].$$

Жоғарыда келтірілгендей, беріктік шарттарын келесі түрде өрнектейміз:

$$\sigma_{экв III} = \frac{\sqrt{M_u^2 + T^2}}{W_z} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T^2}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (23.5)$$

және

$$\sigma_{экв IV} = \frac{\sqrt{M_u^2 + 0,75T^2}}{W_z} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0,75T^2}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (23.6)$$

(23.5) және (23.6) өрнектердің алымы есептеу моменттері деп аталады:

$$M_{экв III} = \sqrt{M_u^2 + T^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T^2}, \quad (23.7)$$

$$M_{экв IV} = \sqrt{M_u^2 + 0,75T^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0,75T^2} \quad (23.8)$$

Білікті ию және бұраудың бірлескен әсеріне есептеу мысалдарын қарастырамыз.

23.1-мысал. Кривошипті білікке $F = 3,5 кН$ күш әсер етеді (23.4-сурет). Біліктің диаметрін үшінші беріктік теориясын пайдаланып анықтаңыз. $[\sigma] = 160 МПа$; $l = 0,5 м$; $a = 0,1 м$.

Шешуі: Білік бұралу мен иілудің бірге әсеріне ұшыраған (23.4-сурет). Ең үлкен июші моменті

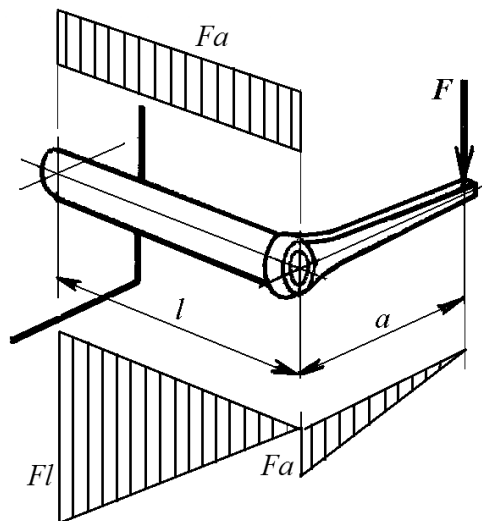
$$M = F \cdot l = 3,5 \cdot 0,5 = 1,75 \text{ кНм},$$

сонымен қатар бұраушы моменті

$$T = F \cdot a = 3,5 \cdot 0,1 = 0,35 \text{ кНм},$$

пайда болатын қауіпті қима қатаң тірек қимасы болады.

Біліктің диаметрін (23.7) өрнегінен анықтаймыз, мұндағы:



23.4-сурет

$$M_{\text{эквIII}} = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{1,75^2 + 0,35^2} = 1,78 \text{ кНм};$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = 0,1 d^3,$$

бұдан біліктің диаметрі мынадай болып шығады:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{эквIII}}}{0,1 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{1,78 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,048 \text{ м}.$$

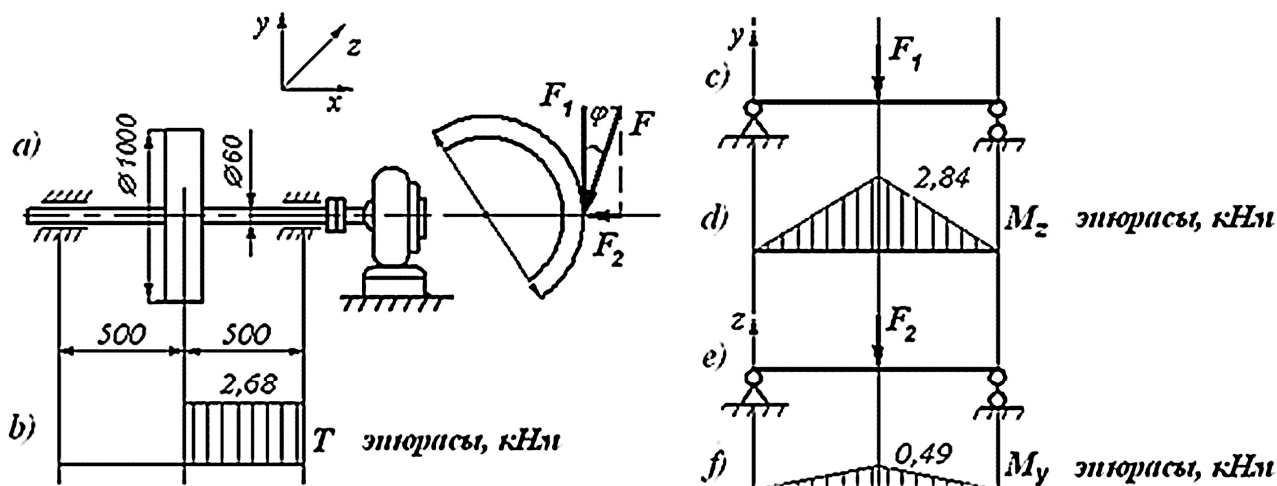
Диаметрдің өлшемін сантиметрдің бүтін санына дейін жуықтатып, $d = 5 \text{ см}$ деп қабылдаймыз.

23.2-мысал. Электр қозғалтқышпен қозғалысқа келтірілетін білікке салмағы $G = 6 \text{ кН}$ тісті дөңгелек отырғызылған. Айналу жазықтығында дөңгелек тісіне $\varphi = 20^\circ$ бұрышпен $F = 5,7 \text{ кН}$ күш (басқа дөңгелектің тісінің қысымы) әсер етеді (23.5, a-сурет). Мүмкіндік кернеуді $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$ деп алып, төртінші беріктік шартымен біліктің беріктігін тексеріңіз. Суретте берілген өлшемдер миллиметрмен алынған.

Шешуі: Берілген F күшін y , x өстері бағытында F_1 , F_2 құраушы күштеріне жіктейік.

$$F_1 = F \cos \varphi = 5,7 \cos 20^\circ = 5,36 \text{ кН};$$

$$F_2 = F \sin \varphi = 5,7 \sin 20^\circ = 1,95 \text{ кН}.$$



23.5-сурет

Анықталған F_1 күшін біліктің өсіне дөңгелек жазықтығына көшіре отырып, электр қозғалтқыштан білікке берілетін бұраушы моментті анықтайық.

$$T = F_1 \cdot \frac{d}{2} = 5,36 \cdot 0,5 = 2,68 \text{ кНм}.$$

Бұл моменттің әсерінен біліктің BC аралығы бұрала деформацияланады. Біліктің бұраушы момент эпюрі 23.5, b -суретте көрсетілген. Білік F_1 күші мен дөңгелектің G салмағы әсерінен қос тіректі арқалық сияқты xz жазықтығында (23.5, c -сурет), ал F_2 күш әсерінен xy жазықтығында (23.5, d -сурет) иіледі. Әр жазықтықтағы июші моменттер эпюрасы 23.5, e, f -суреттерінде көрсетілген.

Біліктің дөңгелек отырғызылған қимасы қауіпті қима болып табылады. Сондықтан есептің шартында көрсетілгендей, біліктің беріктігін төртінші беріктік шартымен тексереміз. Қарастырып отырған білік кеңістікте жүктелген болғандықтан, $M_{экв, IV}$ келтірілген момент төртінші беріктік теориясы бойынша (23.8) өрнегімен есептеледі.

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_u^2 + 0,75T^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0,75T^2}.$$

Онда кеңістікте жүктелген біліктің төртінші беріктік теориясы бойынша беріктік шартын былайша түзеуге болады:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_z} \leq [\sigma],$$

мұндағы: $W_z = 0,1d^3 = 0,1 \cdot 0,06^3 = 21,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, $M_z = 2,84 \text{ кНм}$,
 $M_y = 0,49 \text{ кНм}$, $T = 2,68 \text{ кНм}$.

Келтірілген моменттің шамасы

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{2,84^2 + 0,49^2 + 0,75 \cdot 2,68^2} = \sqrt{13,6925} = 3,7 \text{ кНм}.$$

Біліктің беріктігін тексереміз

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{3,7 \cdot 10^3}{21,6 \cdot 10^{-6}} = 171,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 171,3 \text{ МПа} \leq [\sigma].$$

Сонымен, берілген біліктің беріктігі қамтамасыз етілгенін көреміз.

23.3. Бұралу және созылу немесе сығылу

Бұралу және созылу деформациялары тіркесіне бұрандалар мен бекіту бұрамалары, ал бұралу және созылу деформациялары тіркесіне домкрат және бұрамалы престер бұрамалары, бұрғылар және бұрғылау станоктары жұмыс жасайды. Әдетте, бұл тетіктерді созылу және сығылу мүмкіндік кернеулері бірдей материалдардан жасайды.

Бұл жағдайларда тік және жанама кернеулер келесі формулалармен анықталады:

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad \tau = \frac{T}{W_\rho}.$$

Үшінші беріктік теориясын қолданып

$$\sigma_{эквIII} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma], \quad (23.9)$$

ал төртінші беріктік теориясын

$$\sigma_{эквIII} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{T}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (23.10)$$

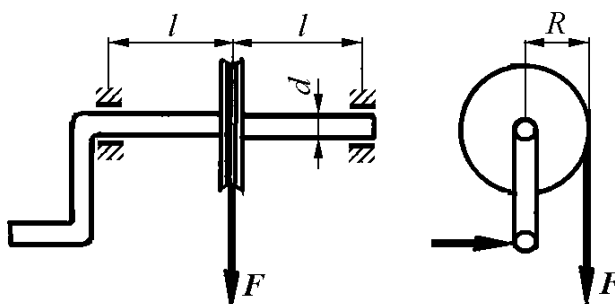
есептеу формулаларын аламыз.

Бұл тақырыпқа есептер «Техникалық механика» курсының «Машина тетіктері» бөлімінде қарастырылады.

Жаттығу есептері

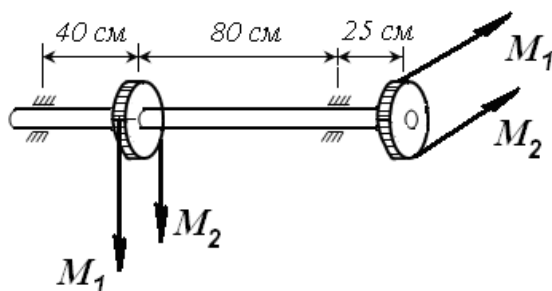
1-есеп. Көлденең қимасы дөңгелек болат білеудің қауіпті қимасында $M_z = 700 \text{ Нм}$ июші момент және $T = 800 \text{ Нм}$ бұраушы момент туындайды. Егер $d = 50 \text{ мм}$; $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$ болса, ең үлкен жанама кернеулер жорамалы бойынша білеудің беріктігі қандай?

2-есеп. Ең үлкен жанама кернеулер жорамалымен шығырмен көтерілетін жүктің F ең үлкен мүмкіндік шамасын анықтаңыз (1-сурет). Шығырдың білік қимасы дөңгелек, диаметрі $d = 30 \text{ мм}$. $l = 400 \text{ мм}$, $R = 180 \text{ мм}$. Білік материалының мүмкіндік кернеуі $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$.



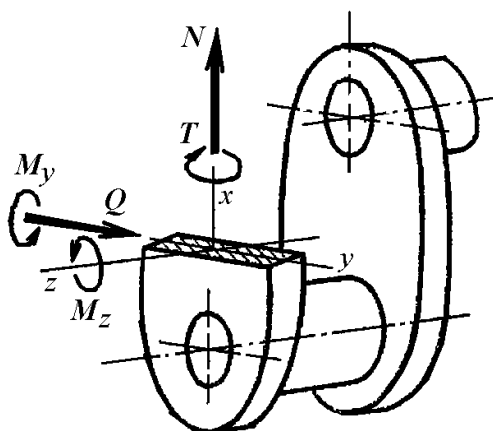
1-сурет

3-есеп. Білікке екі бірдей A және B шкивтері тығыз орнатылған (2-сурет). Жетекші A шкиві $n=100$ айн/мин айналу жылдамдығымен $N=10$ ат күші қуат береді. A шкиві тартпасының қос тармағы көлденең бағытталса, B шкиві тартпасының тармақтары тік бағытталған. Тартпа керілуі: $T_2=15\text{ Н}$, $T_1>T_2$. Шкивтердің диаметрі 60 см тең. Үшінші беріктік теориясының беріктік шартынан қажетті білік диаметрін анықтаңыз $[\sigma]=80\text{ МПа}$.

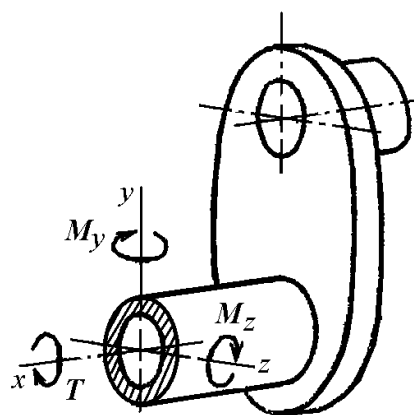


2-сурет

4-есеп. Қозғалтқыштың иінді білік жағының қимасында тиісінше үлкен және кіші қатаңдық жазықтықтарында июші моменттер $M_z=0,7\text{ кНм}$ және $M_y=1,5\text{ кНм}$, бұраушы момент $T=0,45\text{ кНм}$, үлкен қатаңдық жазықтығында көлденең күш $Q=25\text{ кН}$ және бойлық күш $N=37\text{ кН}$ әсер етеді (3-сурет). Жақ қимасы өлшемдері $a=100\text{ мм}$, $b=25\text{ мм}$ тікбұрыш. Мүмкіндік кернеуді $[\sigma]=140\text{ МПа}$ деп алып, төртінші беріктік жорамалымен жақтың беріктігін тексеріңіз.



3-сурет



4-сурет

5-есеп. Иінді біліктің бұлғақтық мойынның көлденең қимасында $T = 2,9 \text{ кНм}$ бұраушы момент және екі өзара перпендикуляр жазықтықтарда июші моменттер $M_z = 0,7 \text{ кНм}$ және $M_y = 1,1 \text{ кНм}$ әсер етеді (4-сурет). Мойынның сыртқы және ішкі диаметрлері $D = 66 \text{ мм}$ және $d = 42 \text{ мм}$. Мүмкіндік кернеуді $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$ деп алып, төртінші беріктік жорамалымен мойынның беріктігін тексеріңіз.

Қайталау сұрақтары:

1. Күрделі қарсыласу дегеніміз не?
2. Иіліп бұралған білеуде қандай кернеулер пайда болады?
3. Иіліп бұралған білеудің қауіпті қимасы қалай анықталады?
4. Иіліп бұралған қимасы дөңгелек білеудің қандай нүктелері қауіпті?
5. Иіліп бұралғанда қауіпті нүкте қандай кернеулі күйде болады?
6. Иіліп бұралған біліктің беріктігі қалай тексеріледі?

24-тарау. БОЙЛЫҚ ИЛУ

24.1. Бойлық илу ұғымы

Қарастырылған конструкция элементтерін беріктікке есептеу әдістері негізгі принципке сүйеніп құрылды, атап айтқанда, түсірілген жүктеме мен элементтің өлшеміне себепті әсер етуші кернеулер материалды сынақ жүзінде беріктікке зерттеп тағайындалған, мүмкіндік кернеуден ешқашан аспауға тиіс. Бұл тәрізді есептеулер әсер етуші күштің қандай да бір мәнінде конструкция элементтерінің **орнықтылығын** жоғалтуының, оның алғашқы пішінінің өзгеруі мүмкіндігін ескермейді.

Мұндай жағдаймен біз, мысалы, ұзын стерженьді, яғни көлденең өлшемі ұзындығына қарағанда әлдеқайда кіші стерженьді сыққанда кездесеміз. Түзу стержень әсер етуші күштің белгілі бір мәнінде орнықтылығын жоғалтады, ол мезетте дөңестенеді, оның өсі қисаяды.

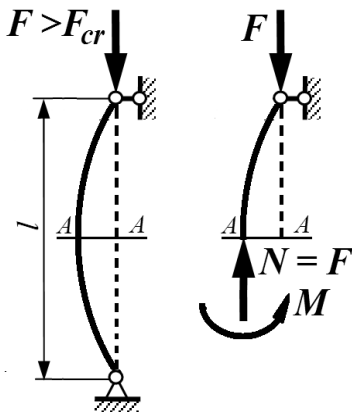
*Бойлық сығу күштері әсерінен алғашында түзусызықты стерженьнің орнықтылығын жоғалтуы нәтижесінде иілуі **бойлық иілу** деп аталады.*

Бойлық иілу сыртқы сығу күштер мен кернеулердің *дағдарыс шамаларына* жеткенде туындайды. Бойлық июдi туындататын ең кіші сыртқы сығу күшін *дағдарыс күш* F_{cr} деп атайды. Жұқа қабырғалы құрылымдардың, стерженьдердің, пластиналардың және қабыршықтардың орнықтылықтарын жоғалтуларының қауіптілігі өте жоғары.

Сығылған стерженьді орнықтылыққа есептеудің мәнісі мынада: оның бойлық F күштің қандай да бір мәнінде түзу сызықты орнықтылығын сақтауы мен қандай да бір орнықтылық қорының болуы.

Бойлық өсі бойымен сығылған топсалы қос тіректі, ұзындығы l көлденең қимасынан елеулі үлкен болат стерженьді қарастырайық. Сығушы күштің F шамасы дағдарыс күштен F_{cr} шамалы асқан делік, яғни стержень орнықтылығын жоғалтып, иілген делік (24.1-сурет).

Қию әдісін қолданып, стержень өсінің майысуы нәтижесінде оның көлденең қимасында екі ішкі күш әсерлері туындайтынын байқаймыз – бойлық күш $N = F$ және ию моменті M .



24.1-сурет

Демек, майысқан стержень бойлық сығылу мен иілу деформацияларының тіркесіне жұмыс жасайды. Сығушы күштің шамасы дағдарыс күштен шамалы үлкен болған жағдайдың өзі конструкцияның беріктігіне қауіп түсіруі мүмкін. Сондықтан конструкцияның дағдарыс күйіне жол беруге болмайды.

Стерженьнің орнықтылығын қамтамасыз ету үшін оған түсірілген сығушы F шамасы дағдарыс күштен F_{cr} кіші болуы қажет.

Сығушы мүмкіндік кернеуді $[F]$ деп белгілейік, сонда

$$[F] = \frac{F_{cr}}{[s_y]}, \quad (24.1)$$

мұнда $[s_y]$ – орнықтылық қор коэффициенті.

Егер $[s_y] > 1$ болса, стерженьнің орнықтылығы қамтамасыз етілетіндігі ақиқат. Орнықтылық қор коэффициентінің мәні стерженьнің тағайындалуы мен оның материалына байланысты. Әдетте, болат үшін $[s_y] = 1,8 \dots 3$; шойын үшін $[s_y] = 5 \dots 5,5$; ағаш үшін $[s_y] = 2,8 \dots 3,2$.

24.2. Эйлер және Ясинский формулалары

Стерженьді орнықтылыққа есептеу үшін дағдарыс күшті F_{cr} анықтау тәсілін білу қажет.

Дағдарыс күшті анықтайтын формуланы ең алғаш 1774 жылы Л.Эйлер жариялаған. *Эйлер формуласын* қорытып шығармай-ақ келтірейік:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_0^2}. \quad (24.2)$$

Мұнда E – бірінші иекті серпімділік модулі; I_{min} – стерженьнің көлденең қимасының центрлік өстік екпін моменттерінің ең кіші

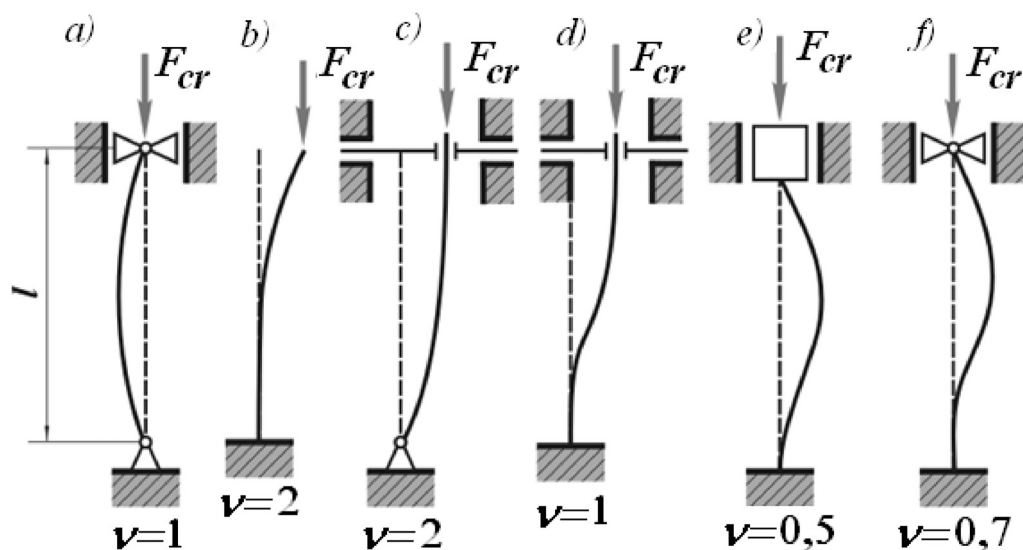
мәні, өйткені бойлық иілген стержень орнықтылығын үнемі ең кіші қатаңдық жазықтығында жоғалтады. Оған темір сызғышты бойлық күшпен сығып оңай көз жеткізуге болады; l_0 – *стерженьнің келтірілген ұзындығы*;

$$l_0 = \nu l, \quad (24.3)$$

мұндағы l – стерженьнің ұзындығы; ν – тірек түрлеріне сәйкес алынатын *ұзындықты келтіру коэффициенті*.

Келтірілген ұзындық деп дағдарыс күші берілген стерженьнің дағдарыс күшіне тең қостіректі стерженьнің ұзындығын айтады.

Ұзындықты келтіру коэффициентінің шамасын анықтау үшін, басқа қарастырылатын стерженьдердің серпімді сызықтары пішіндерін топсалы қостіректі стерженьнің серпімді сызығымен (24.2, а-сурет) жеке-жеке салыстыру қажет.



24.2-сурет

24.2-суретте стержень ұштарының бірнеше бекіту түрі көрсетіліп, ν келтіру коэффициентінің сәйкес мәндері берілген: *a)* екі ұшы да топсалы бекітілген; *b)* бір ұшы бос та, екіншісі қатаң тірекпен бекітілген; *c)* бір ұшы «қалқымалы» қатаң тіректе, екіншісі топсалы бекітілген; *d)* бір ұшы «қалқымалы» қатаң тіректе, екіншісі қатаң тірекпен бекітілген; *e)* екі ұшы да қатаң тірекпен бекітілген; *f)* бір ұшы топсалы жылжымалы тірек те, екіншісі қатаң тірекпен бекітілген.

Эйлер формуласы иілген стерженьнің серпімді сызығын қарастырумен, яғни Гук заңының қолданылу шегі аралығында қорытылып шығарылды. Басқаша айтқанда, Эйлер формуласы сығылған стерженьнің көлденең қималарындағы **дағдарыс кернеу** стержень материалының пропорционалдық шегінен аспаған жағдайда пайдалануға жарамды. Сондықтан Эйлер формуласының қолданылу шегін анықтау үшін **дағдарыс кернеуін** σ_{cr} , яғни бойлық күштің шамасы дағдарыс күшке жеткенде стерженьнің көлденең қимасында A туындайтын тік кернеуін анықтаймыз. Дағдарыс күшке сәйкес келетін тік кернеуді **дағдарыс кернеу** деп атайды:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\nu l)^2 A} \quad \text{немесе} \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \frac{I_{\min}}{A}}{(\nu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\nu l}{i_{\min}}\right)^2},$$

мұндағы $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ – қиманың ең кіші екпін радиусы.

$\frac{\nu l}{i_{\min}} = \lambda$ деп белгілеп, оны **стержень иілгіштігі** деп атау

қалыптасқан. Ол стерженьнің орнықтылығын жоғалтуына қарсыласуын сипаттайды, иілгіштің өсуімен стерженьнің орнықтылығын жоғалтуына қарсыласуы соғұрлым азаяды. Стерженьнің λ иілгіштігі стержень материалына тәуелсіз, ол стерженьнің ұзындығымен, пішінімен және көлденең қимасының өлшемдерімен анықталады. λ өлшем бірліксіз шама.

Дағдарыс кернеу формуласын былайша көшіріп жазайық:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (24.4)$$

Демек, Эйлер формуласын келесі шарт орындалғанда қолдануға болады

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pr}, \quad (24.5)$$

мұндағы σ_{pr} – материалдың пропорционалдық шегі.

Енді осы формуладан стерженьнің иілгіштігін өрнектейік

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}$$

Бұл теңсіздіктің оң жағындағы өлшем бірліксіз шамасын **шектік иілгіш** деп атайды

$$\lambda_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}$$

Сонымен, Эйлер формуласының қолданылуы

$$\lambda \geq \lambda_{cr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}} \quad (24.6)$$

шартымен анықталады.

Эйлер формуласы стержень иілгішінің оны жасаған материалдың шектік иілгіштігінен не үлкен, не тең болғанда ғана пайдалануға жарамды.

Мысалы, азкөміртекті болаттан жасалған стерженьдер үшін $\sigma_{pr} = 200 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ болғандықтан,

$$\lambda_{cr} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100.$$

Эйлер формуласы азкөміртекті болаттан жасалған стерженьдер үшін иілгіштігі $\lambda \geq 100$ болғанда қолданылады.

Осы сияқты басқа да материалдардың иілгіштігін анықтауға болады. Дербес жағдайда, шойын үшін $\lambda_{cr} = 80$; ағаш (қайың) үшін $\lambda_{cr} = 110$.

Іс жүзінде, көптеген конструкция элементтері иілгіштігі шектік мәннен кем стержень болып келеді. Мұндай стерженьдерді орнықтылыққа есептеудің басқа әдісін Ф.С.Ясинский ұсынды. Алдын ала көптеген зерттеулердің нәтижелерін талдап және көптеген материалдардың σ_{cr} мен λ арасындағы тәуелділікті сызбаша

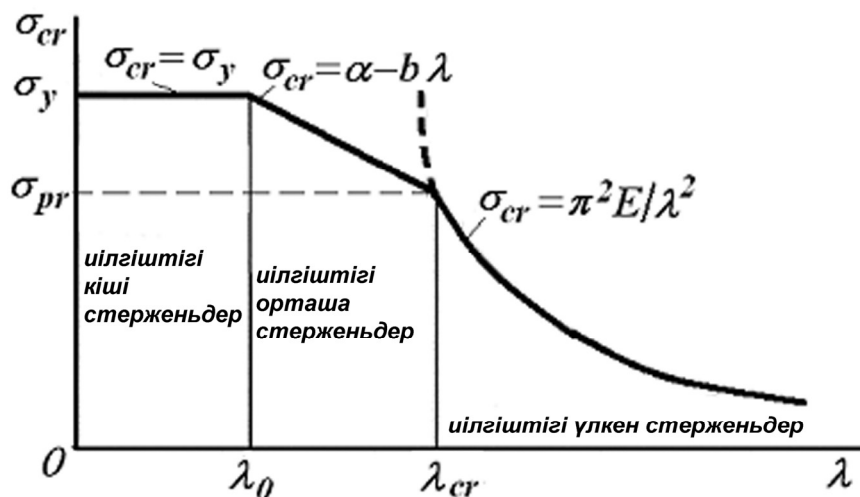
кескіндеп, пропорционалдық шектен үлкен дағдарыс кернеулерді анықтайтын келесі эмпирикалық формуланы қорытып шығарды:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \quad (24.7)$$

мұндағы a, b – материалдарға байланысты, тәжірибе жүзінде анықталатын, қабылданатын тұрақты коэффициенттер. Бұл формуланы **Ясинский формуласы** деп атайды. Кейбір материалдар үшін a, b коэффициенттері 24.1-кестеде берілген.

24.1-кесте

Материалдар	a	b	λ_0	λ_{cr}
	$МПа$ немесе $Н/мм^2$			
Ст. 2, Ст. 3	310	1,14	60	100
Ст. 20, Ст. 4	328	1,15	6	96
Ст. 45	449	1,67	52	85
Дюралюмин Д16Т	406	1,83	30	53
Ағаш	29,3	0,194	-	70



24.3-сурет

24.3-суретте пластикалық материалдан (азкөміртекті болаттан) жасалған стерженьнің σ_{cr} мен λ арасындағы тәуелділіктің сызбасы келтірілген. Осыған ұқсас сызбаларды зерттеу нәтижесінде стерженьдерді шартты түрде үш топқа бөлуге болады. Дағдарыс кернеулері – Эйлер формуласымен (24.4) анықталатын, иілгіштігі

үлкен стерженьдер ($\lambda \geq \lambda_{cr}$). Иілгіштігі орташа стерженьдер – ($\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_{cr}$), олардың дағдарыс кернеуі Ясинский формуласымен (24.7) есептеледі. Иілгіштігі кіші стерженьдер – яғни қысқа стерженьдер.

Олардың дағдарыс кернеулері пластикалық материалдар үшін аққыштық, ал морт материалдар үшін беріктік шегіне тең деп алынады. Мұндай стерженьдер орнықтылыққа емес, қарапайым сығудағы секілді беріктікке есептелуі керек.

24.3. Түзусызықты стерженьді орнықтылыққа есептеу

Сығылған стерженьнің орнықтылығын қамтамасыз ету үшін, ондағы нақты кернеулердің шамасы дағдарыс кернеудің қандай да бір бөлігіне тең болатындай етіп, оның өлшемдерін таңдау қажет, яғни орнықтылыққа есептегендегі мүмкіндік кернеу $[\sigma_{cr}]$ дағдарыс кернеудің қандай да бір бөлігін құруға тиіс

$$[\sigma_{cr}] = \frac{\sigma_{cr}}{[s_y]}$$

Сығылған стерженьнің орнықтылық шарты беріктік шартына іспеттес болады, келесі түрде жазылады:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{cr}]. \quad (24.8)$$

Түзусызықты сығылған стерженьді орнықтылыққа есептеуінің үш мәселесі бар: жобалау, тексеру және жүк көтеру. Осы есептеулердің әрқайсысын қарастырамыз.

Жобалау есебі. Стерженьнің көлденең қимасының минималь екіпін моментін анықтаймыз

$$I_{\min} = \frac{F[s_y](\nu l)^2}{\pi^2 E},$$

мұнда F – әсер ететін күш.

Мұнан кейін стерженьнің иілгіштігін табамыз

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{\min}},$$

мұндағы $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$; A – қиманың ауданы.

Алынған иілгіштік мәнін материалдың шектік шамасымен салыстырамыз.

Тексеру есебі. Орнықтылық қор коэффициентінің s_y нақты мәнін анықтап, оның мүмкіндік мәнімен салыстырамыз

$$s_y = \frac{F_{cr}}{F} \geq [s_y].$$

Жүк көтеру есебі. Жүктеменің мүмкіндік мәнін келесі формуламен анықтайды

$$[F] = \frac{F_{cr}}{[s_y]}.$$

Орнықтылыққа есептеудің мүмкіндік кернеуінің қарапайым сығуға есептеудегі мүмкіндік кернеумен байланысын былайша өрнектеуге болады:

$$[\sigma_{cr}] = \varphi[\sigma_c], \quad (24.9)$$

мұндағы φ – *сығудың мүмкіндік кернеуін кемітуші коэффициент* немесе *бойлық иілу коэффициенті* деп аталады; $[\sigma_c]$ – *сығудың мүмкіндік кернеуі*.

Олай болса, сығылған стерженьнің орнықтылық шартын мынадай түрде алуға болады:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma_{cr}] \quad (24.10)$$

Бойлық иілу коэффициенттерінің шамасы стерженьнің материалына және иілгіштігіне байланысты болады. Әртүрлі материалдар үшін φ коэффициентінің мәндері қосымшада келтірілген.

Өлшемдері мен материалдары берілген сығылған стерженьді орнықтылығын тексеру қиманың ең кіші екпін радиусы i_{min} мен стерженьнің иілгіштігі λ анықталып, арнаулы кесте бойынша φ коэффициентін табуға келтіріледі.

Жобалау есебі, яғни сығылған стерженьнің қимасын анықтау жеткілікті күрделі есептеу болып табылады, өйткені φ коэффициенті стерженьнің иілгіштігі λ байланысты, ал соңғысы әзірге белгісіз қиманың пішіні мен өлшеміне байланысты. Сондықтан жобалау есебі біртіндеп жобалау тәсілімен шығарылады.

Жүктеменің мүмкіндік шамасы анықтау келесі формуламен жүргізіледі

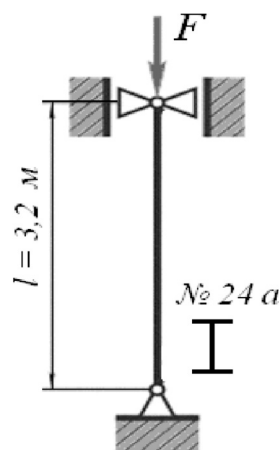
$$[F_{cr}] = \varphi[\sigma_c] \cdot A. \quad (24.11)$$

Есептеулер көрсеткендей, бойлық иілуге ең ұтымды қима, салыстырмалы үлкен екпін моменттері болатын, жұқа қабырғалы сақина және қораб пішінді қималар.

24.4. Есептерді шешудің әдістемесі

24.1-мысал. Егер қажетті орнықтылық қоры коэффициенті $n_s = 2,8$, материалы Ст.3 болат болса, қадаға түсетін жүктеменің мүмкіндік шамасы қандай болуы мүмкін (24.4-сурет)? $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Шешуі: Прокат пішіндердің арнаулы кестесінен (9239-89 МемСТ) №24-а пішінді қостағрдың есептеуге қажетті геометриялық сипаттамаларын аламыз:



24.4-сурет

$$I_{min} = 260 \text{ см}^4 = 260 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$i_{min} = 2,63 \text{ см} = 2,63 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$A = 37,5 \text{ см}^2 = 37,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Қаданың ұзындығы мен ұштарының бекітілу тәсілдері белгілі болғандықтан, бірінші кезекте берілген қаданың иілгіштігін анықтаймыз:

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 3,2}{2,63 \cdot 10^{-2}} = 122.$$

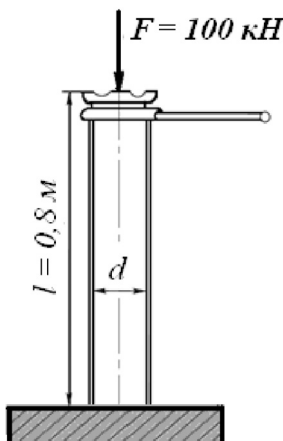
$\lambda > \lambda_{pr} = 100$ болғандықтан, есептеуді Эйлер өрнегімен жүргізіп, дағдарыс күштің мәнін есептейміз.

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\nu \cdot l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 260 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 3,2)^2} = 500 \text{ кН}.$$

Олай болса, жүктеменің мүмкіндік шамасы

$$[F] = \frac{F_{cr}}{s_y} = \frac{500}{2,8} = 178,5 \text{ кН}.$$

24.2-мысал. Қор коэффициентін $s_y = 3,5$ деп алып, орнықтылыққа есептеуден домкрат бұрандасының ішкі диаметрін анықтаңыз (14.5-сурет).
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{pr} = 240 \text{ МПа}$.



24.5-сурет

Бұранданың жоғарғы ұшы еркін қозғалады деп есептеліп, бұранда тілімдерінің әсері ескерілмесін.

Шешуі: Бұранда қимасының қажетті екіпін моментін Эйлер өрнегінің негізінде келесі тәуелділіктен анықтаймыз:

$$I_{\min} = I \geq \frac{F \cdot s_y (\nu l)^2}{\pi^2 E},$$

мұндағы $\nu = 2$ – бұранданы жоғарғы ұшы бос, төменгі ұшы қатаң бекітілген қада ретінде қарастырамыз.

Сан мәндерін қоя отырып,

$$I \geq \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 3,5(2 \cdot 0,8)^2}{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11}} = 43,274 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

шамасын аламыз.

Бұранданың ішкі диаметрін анықтаймыз.

$$I = \frac{\pi d^4}{64},$$

бұдан

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot I}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 43,274 \cdot 10^{-8}}{3,14}} = 5,45 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Диаметрді $d = 55 \text{ мм}$ деп қабылдаймыз.

Есептеуде Эйлер өрнегін пайдаланғандығымыздан, оның қолданылу шартын тексереміз.

Бұранда қимасының екпін радиусы

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 / 64}{\pi d^2 / 4}} = \frac{d}{4} = \frac{5,5 \cdot 10^{-2}}{4} = 1,375 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Бұранданың иілгіштігі

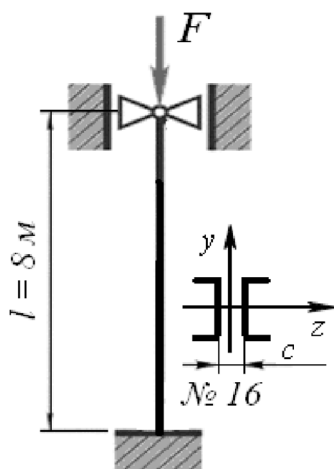
$$\lambda = \frac{\nu l}{i} = \frac{2 \cdot 0,8}{1,375 \cdot 10^{-2}} = 116,4,$$

ал бұранда материалының шеткі иілгіштігі

$$\lambda_{pr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}} = 3,14 \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{240}} = 92,8.$$

Есептеуден $\lambda > \lambda_{pr}$ екенін аңғарамыз, олай болса, Эйлер өрнегін орынды пайдаланғанбыз.

24.3-мысал. Ст.3 болаттан жасалып, сығылған қаданың жүк көтеру қабілетін анықтаңыз. $[\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Қада бір-бірімен қатаң бекітілген екі швеллерден құрылған (24.6-сурет).



24.6-сурет

Швеллер қабырғаларының арасындағы саңылаудың ұзындық шамасы қаданың әрбір бағыттағы тең орнықтылық шартынан анықталады.

Егер қада жүктеменің мүмкіндік шамасымен жүктелген болса, қандай орнықтылық қоры коэффициентімен жұмыс істеуі керек?

Шешуі: Прокат пішіндердің арнаулы кестесінен (8240-89 МемСТ) алатынымыз:

$$I_{z_1} = 747 \text{ см}^4 = 747 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{y_1} = 63,3 \text{ см}^4 = 63,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$i_z = 5,42 \text{ см} = 5,42 \cdot 10^{-2} \text{ м}; z_0 = 1,8 \text{ см} = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$A_1 = 18,1 \text{ см}^2 = 18,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Қаданың әрбір бағыттағы тең орнықтылық күйі оның көлденең қимасының бас z, y өстеріне қарағандағы екпін моменттерінің тең болған жағдайында ғана қамтамасыз етіледі.

Қиманың z өсіне қарағандағы екпін моменті c қашықтығына тәуелсіз. Оның шамасын анықтаймыз

$$I_z = 2 \cdot I_{z_1} = 2 \cdot 747 \cdot 10^{-8} = 1494 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Қиманың y өсіне қарағандағы екпін моменті

$$I_y = 2 \left(I_{y_1} + \left(\frac{c}{2} + z_0 \right)^2 \cdot A_1 \right).$$

Тең орнықтылық шартына ($I_z = I_y$) сан мәндерді қоя отырып, есептейміз.

$$1494 \cdot 10^{-8} = 2 \left(63,3 \cdot 10^{-8} + \left(\frac{c}{2} + 1,8 \cdot 10^{-2} \right)^2 \cdot 18,1 \cdot 10^{-4} \right),$$

бұдан $c = 0,087 \text{ м}$.

Жүктеменің мүмкіндік шамасын

$$[F_{cr}] = \varphi [\sigma_c] \cdot A$$

өрнегінен анықтаймыз, мұндағы $A = 2 \cdot A_1$.

Қаданың иілгіштігі

$$\lambda = \frac{\nu \cdot l}{i} = \frac{0,7 \cdot 8}{5,42 \cdot 10^{-2}} = 103,3.$$

Бұған сәйкес келетін φ коэффициентін сызықтық интерполяциялау тәсілімен E қосымшада келтірілген кестеден анықтаймыз.

$$\lambda = 100 \dots \varphi = 0,6$$

$$\lambda = 110 \dots \varphi = 0,52$$

$$\Delta \lambda = 10 \dots \Delta \varphi = 0,08$$

$$\lambda = 103,3 \text{ болғанда } \varphi = 0,6 - 3,3 \cdot 0,008 = 0,57.$$

Демек,

$$[F_{cr}] = 0,57 \cdot 160 \cdot 2 \cdot 18,1 \cdot 10^{-4} = 330 \text{ кН}.$$

Енді орнықтылық қоры коэффициентін $S_y = \frac{F_{cr}}{[F_{cr}]}$ өрнегінен есептейміз.

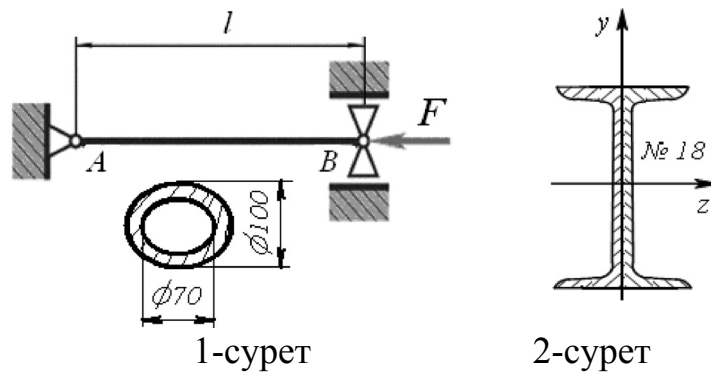
Бұл өрнектегі F_{cr} дағдарыс күшін Эйлер өрнегімен анықтаймыз, өйткені $\lambda > \lambda_{pr}$ шарты қанағаттандырылған.

$$F_{cr} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1494 \cdot 10^{-9}}{(0,7 \cdot 8)^2} = 939 \text{ кН}.$$

Олай болса $s_y = \frac{939}{330} = 2,85$.

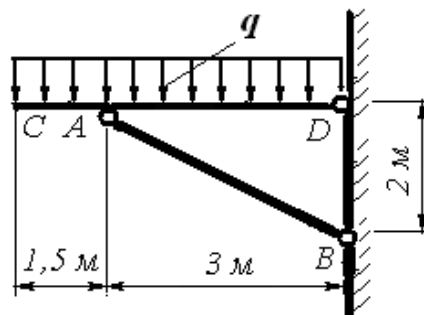
Жаттығу есептері

1-есеп. Ұштары топсалы тірелген, сығылған болат құбырдың дағдарыс жүктемесін анықтаңыз (1-сурет). Құбыр материалының пропорционалдық шегі $[\sigma_{pr}] = 210 \text{ МПа}$, $l = 3 \text{ м}$.



2-есеп. Көлденең қимасының пішіні 2-суретте келтірілген қадаға әсер етуші жүктеменің мүмкіндік шамасын анықтаңыз. Қаданың ұзындығы. $l = 1,5 \text{ м}$ және оның ұштары қатаң бкітілген. Есептеуді Ясинский өрнегімен жүргізу керек: $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1,14 \text{ МПа}$. Орнықтылық қоры коэффициенті $s_y = 1,8$.

3-есеп. Кронштейннің (3-сурет) негізгі мүмкіндік кернеуі $[\sigma_c] = 11 \text{ МПа}$ ағаш AB тірегінің диаметрін анықтаңыз. Тіректің екі ұшы топсалы тіректі деп қарастыру керек. CD арқалығындағы бір қалыпты таралған жүктеменің қарқыны $q = 6 \text{ МН/м}$.



3-сурет

Қайталау сұрақтары

1. Сығылған стерженьнің орнықтылығын жоғалтуы құбылысы неге байланысты?
2. Дағдарыс күш және дағдарыс кернеу дегеніміз не?
3. Дағдарыс күшті анықтайтын Эйлер формуласын жазыңыз.
4. Эйлер формуласына көлденең қиманың қандай екпін моменті енеді? Бұл жерде айрықша жағдай болуы мүмкін бе?
5. Дағдарыс күшке стерженьнің ұзындығы l мен оның көлденең қимасының қатаңдығының EI әсерлері қандай?
6. Эйлер өрнегін қолданудың шегі қандай?
7. Стерженьнің бекітілу шарттары дағдарыс күштің шамасына қалай әсер етеді? Ұзындықты келтіру коэффициенті деген не?
8. Эйлер формуласының тұтыну шегі қалай тағайындалады?
9. Дағдарыс кернеуді анықтайтын Ясинскийдің формуласының түрі қандай және ол Ст. 3 болат стерженьдер үшін иілгіштің қандай мәнінде пайдаланылады?
10. Дағдарыс күш Ясинский бойынша қалай анықталады?
11. Стерженьнің иілгіштігі деп нені айтамыз және оның шамасы қандай өрнекпен есептеледі? Оның өлшем бірлігі неге тең?
12. Шекті иілгіш дегеніміз не және ол қалай өрнектеледі?
13. Шектік иілгіштің шамасын анықтау үшін оның материалының қандай физикалық-механикалық сипаттамаларын білу қажет?
14. Болат стерженьдер үшін, дағдарыс кернеу мен иілгіштің тәуелділігін көрсететін сызбаның түрі қандай?
15. Сығылған стерженьнің орнықтылық шартын тұрғызыңыз.

Қосымшалар

Қосымша А
(анықтамалық)

Көміртекті конструкциялық болаттардың механикалық сипаттамалары

Болат маркасы	σ_u	σ_y	τ_y	$l=10d$ болғандағы салыстырмалы ұзаруы %	Соғу тұт. $a \times 10^{-5}$ Дж/м ²
	кем емес				
	МПа				
10	340	210	140	31	24
20	420	250	160	25	-
25	460	280	-	23	9
30	500	300	170	21	8
35	540	320	190	20	7
40	580	340	-	19	6
45	610	360	220	16	5
50	640	380	-	14	4
55	660	390	-	13	-
60	690	410	-	12	-
20Г	460	280	-	24	-
30Г	550	320	-	20	8
50Г	660	400	-	13	4
20Х	800	650	-	11	6
40Х	1000	800	-	10	6
45Х	1050	850	-	9	5
30ХМ	950	750	-	11	8
35ХМ	1000	850	-	12	8
40ХН	1000	800	390	11	7
50ХН	1100	900	-	9	5
40ХФА	900	750	-	10	9
38ХМЮА	100	850	-	14	9
12ХНЗА	950	700	400	11	9
20ХНЗА	950	750	-	12	10
30ХНЗА	1000	800	-	10	8
40ХНМА	1000	950	-	12	10
30ХГСА	1100	850	-	10	5

Шойынның механикалық сипаттамалары

Шойын материалы	Беріктік шегі				Бринелл қаттылығы, <i>HВ</i>
	созудың σ_u	сығудың σ_u	июдің σ_u	бұраудың τ_u	
СЧ 12-28	120	500	280	-	1430-2290
СЧ 15-36	150	650	320	240	1630-2290
СЧ 18-36	180	700	350	-	1700-2290
СЧ 21-40	210	750	400	280	1710-2410
СЧ 24-44	240	850	440	300	1870-2170
СЧ 28-48	280	1000	480	350	1700-2410
СЧ 32-52	320	1100	520	390	1870-2550
СЧ 35-56	350	1200	560	400	1970-2690
СЧ 38-60	380	1400	600	460	2070-2690
ВЧ 40-10	400	1600-1700	-	480-510	1560-1970
ВЧ 50-1,5	500	1860-2000	-	740-790	1870-2550
ВЧ 60-2	600	2040-2290	-	660-810	1970-2690
Ескертпе: келесі шойындардың σ_y аққыштық шегі					
	ВЧ 40-10	–	300		
	ВЧ 50-1,5	–	380		
	ВЧ 60-2	–	420		

Қосымша Б
(анықтамалық)

**Температуралық сызықтық ұлғаю коэффициенті
және Пуассон коэффициенті**

Материал	Температуралық сызықтық ұлғаю коэффициенті $\alpha \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Пуассон коэффициенті ν
Болат	120	0,3
Шойын	114	0,23-0,27
Алюминий	230	0,32-0,36
Қорғасын	290	0,42
Мыс	170	0,31-0,34
Күміс	197	0,37
Қола	170-220	0,32-0,35
Жез	170-220	0,32-0,42
Жәмшілген мырыш	-	0,27
Бетон	100	0,17-0,2
Тас қалақ	40-70	-
Ағаш	20-50	-

Қосымша В
(анықтамалық)

Кейбір материалдардың беріктік шегі

Материал	Беріктік шегі	
	созғанда	сыққанда
	<i>МПа</i>	
Қарапайым сұр шойын	140-180	600-1000
Ұсақ түйіршікті сұр шойын	210-250	До 1400
Пластмассалар		
Бакелит	20-30	80-100
Целлюлоид	50-70	-
Текстолит	85-100	130-250
Гетинакс	150-170	150-180
Бакелизирелінген фанера	130	115
Ағаш / ылғалдығы 15% /		
Қарағай талшық бойымен	80	40
Қарағай талшыққа кесе-көлденең	-	5
Шырша талшық бойымен	65	35
Шырша талшыққа кесе-көлденең	-	4
Емен талшық бойымен	95	50
Емен талшыққа кесе-көлденең	-	15
Тастар		
Гранит	30	120-260
Құмтас	20	40-150
Әктас	-	50-150
Кірпіш	-	7,4-30
Бетон	-	5-35
Ерітіндідегі тас қалақ	0,2-0,5	2,5-9

Қосымша Г
(анықтамалық)

Серпімді модульдер мен Пуассон коэффициенттері

Материал	Серпімділік модулі E, МПа	Ығысу модулі G, МПа
Ақ, сұр шойын	$(1,15 \div 1,60) \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^5$
Балқымалы шойын	$1,55 \cdot 10^5$	-
Көміртекті болат	$(2,05 \div 2,1) \cdot 10^5$	$(8,0 \div 8,1) \cdot 10^4$
Қоспалы болат	$(2,1 \div 2,2) \cdot 10^5$	$(8,0 \div 8,1) \cdot 10^4$
Илемделген мыс	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$
Суық созылған мыс	$1,3 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^4$
Құйылған мыс	$0,84 \cdot 10^5$	-
Жәмшілген фосфорлы қола	$1,15 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$
Суық созылған жез	$(0,91 \div 0,99) \cdot 10^5$	$(3,5 \div 3,7) \cdot 10^4$
Жәмшілген маргенецті қолазы	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$
Жәмшілген алюминий	$0,09 \cdot 10^5$	$(2,6 \div 2,7) \cdot 10^4$
Созылған алюминий сым	$0,7 \cdot 10^5$	-
Құйылған алюминді қола	$1,05 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$
Жәмшілген дюралюмин	$0,71 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^4$
Жәмшілген мырыш	$0,84 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^4$
Гранит	$0,49 \cdot 10^5$	-
Әктас	$0,42 \cdot 10^5$	-
Мәрмәр	$0,56 \cdot 10^5$	-
Құмтас	$0,18 \cdot 10^5$	-
Қалақ кірпіштен	$(0,027 \div 0,030) 10^5$	-
Бетон беріктік шегі, МПа		
10	$(0,146 \div 0,196) \cdot 10^5$	-
15	$(0,164 \div 0,214) \cdot 10^5$	-
20	$(0,182 \div 0,232) \cdot 10^5$	-
Ағаш талшық бойымен	$(0,1 \div 0,12) \cdot 10^5$	$0,055 \cdot 10^4$
Ағаш талшыққа кесе-көлденең	$(0,005 \div 0,01) \cdot 10^5$	-

**Созу мен сығудың негізгі мүмкіндік кернеулерінің
жуық шамалары**

Материал	Мүмкіндік кернеу	
	созылу	сығылу
	<i>МПа</i>	
Құйылған сұр шойын	25-80	120-150
Болат Ст. 2	140	
Болат Ст. 3	160	
Көпірлік болат Ст. 3	140	
Көміртекті машинажасау (конструкциялық) болаты	60-250	
Көміртекті машинажасау (конструкциялық) болаты	100-400 және жоғары	
Мыс	30-120	
Жез	70-140	
Қола	70-120	
Алюминий	30-80	
Алюминді қола	80-120	
Дюралюминий	80-150	
Текстолит	30-40	
Гетинакс	50-70	
Бакелизирелінген фанера	40-50	
Қарағай талшық бойымен	7-10	10-12
Қарағай талшыққа кесе-көлденең	-	1,5-2,0
Емен талшық бойымен	9-13	13-15
Емен талшыққа кесе-көлденең	-	2,0-3,5

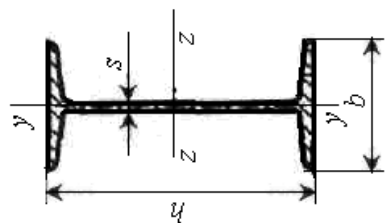
Қосымша Е
(анықтамалық)

Негізгі мүмкіндік кернеуін кеміту коэффициенті

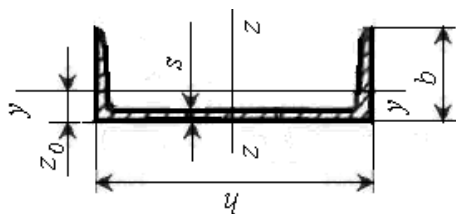
Иілгіш λ	φ коэффициенті				
	Ст 1, Ст 2 Ст 3, Ст 4	Ст5	Жоғарғы сапалы болат $\sigma_y \geq 320$ МПа	Шойын	Ағаш
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,37	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

Прокаатты пішіндердің сортаменттік кестесі

Қоставр (8239-89 МемСТ):



- h – қиманың биіктігі;
- b – қиманың ені;
- s – тік қабырғаның қалыңдығы;
- I – екпін моменті;
- W – кедергі моменті;
- i – екпін радиусы;
- S – жарты қиманың статикалық моменті.



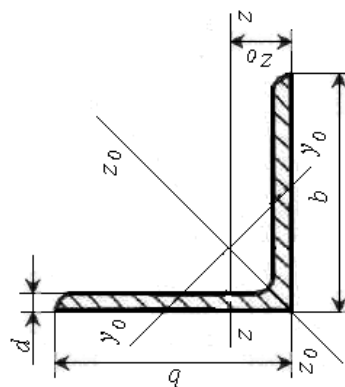
Швеллер(8240-89 МемСТ):

- h – қиманың биіктігі;
- b – қиманың ені;
- s – тік қабырғаның қалыңдығы;
- I – екпін моменті;
- W – кедергі моменті;
- i – екпін радиусы;
- S – жарты қиманың статикалық моменті;

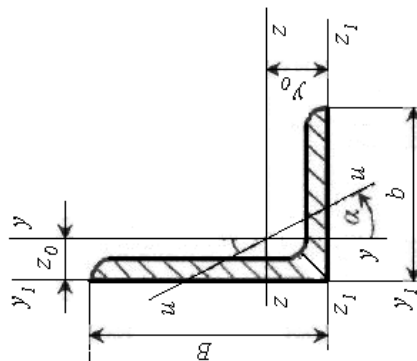
z_0 – тік қабырғасының сыртқы бетінен y өсіне дейінгі ара қашықтық.

Тең бүйірлі бұрыштама

(8509-89 МемСТ):



- b – қабырғаларының өлшемі;
- d – қабырғаның қалыңдығы;
- I – екпін моменті;
- i – екпін радиусы;
- z_0 – ауырлық ортасынан қабырғаларының сыртқы бетіне дейінгі арақашықтық



Бүйірлері әртүрлі бұрыштама
(8510-89 МемСТ):

- B – қиманың биіктігі;
- b – қиманың ені;
- d – қабырғаның қалыңдығы;
- I – екпін моменті;
- i – екпін радиусы;
- z_0, y_0 – ауырлық ортасынан қабырғаларының сыртқы бетіне дейінгі арақашықтық

Ыстықтай жәмшілген болат қоспаулар (8239-89 МемСТ)

Шішін нөмірі	Қиманың өлшемдері			Қиманың ауданы см^2	Өстерге қатысты анықтамалық шамалар						Масса 1 м, кг	
	h	b	s		$z - z$			$y - y$				
					I_{z^2} см^4	W_{z^2} см^3	i_{z^2} см	S_{z^2} см^3	I_{y^2} см^4	W_{y^2} см^3		i_{y^2} см
10	100	55	4,5	12	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,50
14	140	73	4,9	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55	13,70
16	160	81	5,0	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70	15,90
18	180	90	5,1	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88	18,40
18a	180	100	5,1	25,4	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12	19,90
20	200	100	5,2	26,8	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07	21,00
20a	200	110	5,2	28,9	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,60	2,32	22,70
22	220	110	5,4	30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27	24,00
22a	220	120	5,4	32,8	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50	25,80
24	240	115	5,6	34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37	27,30
24a	240	125	5,6	37,5	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63	29,40
27	270	125	6,0	40,2	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54	31,50
27a	270	135	6,0	43,2	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80	33,90
30	300	135	6,5	46,5	7080	742,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69	36,50
30a	300	145	6,5	49,9	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95	39,20
33	330	140	7,0	53,8	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79	42,20
36	360	145	7,5	61,9	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89	48,60
40	400	155	8,3	72,6	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03	57,00
45	450	160	9,0	84,7	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,0	3,09	66,5
50	500	170	10,0	100,0	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23	78,50
55	550	180	11,0	118,0	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39	92,60
60	600	190	12,0	138,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,0	3,54	108,0

Ыстықтай жәмшілген болат швеллерлер (8240-89 МемСТ)

Шішін нөмірі	Қиманың өлшемдері			Қиманың ауданы см^2	Өстерге қатысты анықтамалық шамалар						Z_0 , см	Масса 1 м, кг	
	h	b	s		$z - z$			$y - y$					
					I_{z^2} , см^4	W_{z^2} , см^3	i_{z^2} , см	S_{z^2} , см^3	I_{y^2} , см^4	W_{y^2} , см^3			i_{y^2} , см
5	50	32	4,4	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,51	48,6	15,00	2,54	9,01	8,70	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	8,98	89,4	22,40	3,16	13,30	12,80	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	10,90	174,4	37,80	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	13,30	304,0	50,60	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54	10,40
14	140	58	4,9	15,60	491,0	70,20	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67	12,30
14a	140	62	4,9	17,00	545,0	77,80	5,66	45,10	57,50	13,30	1,84	1,87	13,30
16	160	64	5,0	18,10	747,0	93,40	6,42	5,41	63,30	13,81	1,87	1,80	14,20
16a	160	68	5,0	19,50	823,0	103,00	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00	15,30
18	180	70	5,1	20,70	1090,0	121,00	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94	16,30
18a	180	74	5,1	22,20	1190,0	132,00	7,32	76,10	105,00	20,00	2,18	2,13	17,40
20	200	76	5,2	23,40	1520,0	152,00	8,07	87,70	113,00	20,50	2,20	2,07	18,40
20a	200	80	5,2	25,20	1670,0	167,00	8,15	95,90	139,00	24,20	2,35	2,28	19,80
22	220	82	5,4	26,70	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,37	2,21	21,00
22a	220	87	5,4	28,80	2330,0	212,0	8,89	121,00	187,00	30,00	2,55	2,46	22,60
24	240	90	5,6	30,60	2990,0	242,00	8,73	139,00	208,00	31,60	2,60	2,42	24,00
24a	240	95	5,6	32,90	3180,0	265,00	9,84	151,00	254,00	37,20	2,78	2,67	25,80
27	270	95	6,0	35,20	4160,0	308,00	10,90	178,00	262,00	37,30	1,73	2,47	27,70
30	300	100	6,5	40,50	5810,0	387,00	12,00	224,00	327,00	43,60	2,84	2,52	31,80
33	330	105	7,0	46,50	7980,0	484,00	13,10	281,00	410,00	51,80	2,97	2,59	36,50
36	360	110	7,5	53,40	10820,0	601,00	14,20	350,00	513,00	61,70	3,10	2,68	41,90
40	400	115	8,0	61,50	15220,0	761,00	15,70	444,00	642,00	73,40	3,23	2,75	48,30

Ыстықтай жәмшілген теңбүйірлі болат бұрыштамалар (8509-89 МемСТ)

Пішін нөмірі	Қиманың өлшемдері			Қиманың ауданы см^2	Өстерге қатысты анықтамалық шамалар						Масса I м, кг		
	b	d	мм		$z - z$		$z_0 - z_0$		$y_0 - y_0$			$I_{zy}, \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
					$I_{z^2}, \text{см}^4$	$i_{z^2}, \text{см}$	$I_{z_0^2}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{z_0^2}^{\max}, \text{см}$	$I_{yz}^{\min}, \text{см}^4$	$i_{yz}^{\min}, \text{см}$			
			$I_{z^2}, \text{см}^4$		$i_{z^2}, \text{см}$	$I_{z_0^2}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{z_0^2}^{\max}, \text{см}$	$I_{yz}^{\min}, \text{см}^4$	$i_{yz}^{\min}, \text{см}$	$I_{z_0^2}^{\min}, \text{см}^4$		$i_{z_0^2}^{\min}, \text{см}$	
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,60	0,89	
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64	1,15	
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,47	0,73	1,12	
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,59	0,76	1,46	
		5*	2,27	1,22	0,73	1,91	0,92	0,53	0,48	0,55	0,68	1,78	
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,68	0,80	1,27	
		3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59	0,85	0,85	1,36	
3	30	4	2,27	1,84	0,80	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89	1,78	
		5*	2,78	2,20	0,89	3,47	1,12	0,94	0,58	1,27	0,93	2,18	
		3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	1,03	0,89	1,46	
3,2	32	4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	1,32	0,94	1,91	
		3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69	1,37	0,97	1,60	
3,5	35	4	2,17	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68	1,75	1,01	2,10	
		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68	2,10	1,05	2,58	
		3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09	1,85	
4	40	4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	2,68	1,13	2,42	
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	3,22	1,17	2,97	
		6*	4,48	6,41	1,20	10,13	1,50	2,70	0,78	2,72	1,21	3,52	
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	3,00	1,21	2,08	
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	3,89	1,26	2,73	
		5	4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	4,71	1,30	3,37	
		6*	5,08	9,35	1,36	14,80	1,71	3,90	0,88	5,45	1,34	3,99	

Пішін нөмірі	Қиманың өлшемдері		Қиманың ауданы см^2	Өстерге қатысты анықтамалық шамалар										Масса I м, кг
	b	d		$Z - Z$		$Z_0 - Z_0$		$Y_0 - Y_0$		$I_{zv}, \text{см}^4$	$Z_0, \text{см}$			
				$I_{z^2}, \text{см}^4$	$i_z, \text{см}$	$I_{z_0^{\max}}, \text{см}^4$	$i_{z_0^{\max}}, \text{см}$	$I_{yz}^{\min}, \text{см}^4$	$i_{z_0^{\min}}, \text{см}$					
	мм													
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	4,16	1,33	2,32		
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	5,42	1,38	3,05		
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42	3,77		
5	50	6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46	4,47		
		7*	6,56	14,84	1,50	23,47	1,89	6,21	0,97	8,63	1,50	5,15		
5,6	56	8*	7,41	16,51	1,49	26,03	1,87	6,98	0,97	9,52	1,53	5,82		
		4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52	3,44		
6	60	5	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57	4,25		
		4	4,72	16,21	1,85	25,69	2,33	6,72	1,19	9,48	1,62	3,71		
		5	5,83	19,79	1,84	31,40	2,32	8,18	1,18	11,61	1,66	4,58		
6,3	63	6	6,92	23,32	1,83	36,81	2,31	9,60	1,18	13,60	1,70	5,43		
		8	9,04	29,55	1,81	46,77	2,27	12,34	1,17	17,22	1,78	7,10		
		10	11,08	35,32	1,79	55,64	2,24	15,00	1,16	20,32	1,85	8,70		
7	70	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	11,00	1,69	3,90		
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	13,70	1,74	4,81		
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	15,90	1,78	5,72		
7	70	4,5	6,2	29,04	2,16	46,03	2,72	12,04	1,39	17,00	1,88	4,87		
		5	9,42	43,00	2,14	68,2	2,69	17,80	1,37	18,70	1,99	7,39		
		6	8,15	37,60	2,15	59,6	2,71	15,50	1,38	22,10	1,94	6,39		
		7	9,42	43,00	2,14	68,2	2,69	17,80	1,37	25,20	1,99	7,39		
7	70	8	10,67	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,20	2,02	8,37		
		10*	13,11	57,90	2,10	91,52	2,64	24,27	1,36	33,60	2,10	10,29		

Пішін нөмірі	Қиманың өлшемдері		Қиманың ауданы см^2	Өстерге қатысты анықтамалық шамалар						Масса I м, кг		
	b	d		$Z-Z$		Z_0-Z_0		Y_0-Y_0			$I_{zy}, \text{см}^4$	$Z_0, \text{см}$
				$I_{z^2}, \text{см}^4$	$i_{z^2}, \text{см}$	$I_{z_0^2}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{z_0^2}^{\max}, \text{см}$	$I_{yz}^{\min}, \text{см}^4$	$i_{yz}^{\min}, \text{см}$			
7,5	75	5	7,39	39,50	2,31	62,60	2,91	16,40	1,49	23,10	2,02	5,80
			9,78	46,60	2,30	73,90	2,90	19,30	1,48	27,30	2,06	6,89
			10,10	53,30	2,29	87,60	2,89	22,10	1,48	31,20	2,10	7,96
			11,50	59,80	2,28	94,90	2,87	24,80	1,47	35,00	2,15	9,02
			12,80	66,10	2,27	105,00	2,86	27,50	1,47	38,60	2,18	10,1
			8,63	52,70	2,47	83,60	3,11	21,80	1,59	30,90	2,17	6,78
			9,38	57,00	2,47	90,40	3,11	23,50	1,58	33,40	2,19	7,36
			10,80	65,30	2,45	104,00	3,09	27,00	1,58	38,30	2,23	8,51
			12,30	73,40	2,44	116,00	3,08	30,30	1,57	43,00	2,27	9,65
8	80	10*	15,14	83,58	2,42	140,31	3,04	36,85	1,56	56,70	2,35	11,88
		12*	17,90	102,74	2,40	162,27	3,01	43,21	1,55	59,50	2,42	14,05
		6	10,60	82,10	2,78	130,00	3,50	34,00	1,79	48,10	2,43	8,33
		7	12,30	94,30	2,77	150,00	3,49	38,90	1,78	55,40	2,47	9,64
		8	13,90	106,00	2,76	168,00	3,48	43,80	1,77	62,30	2,51	10,90
		9	15,60	118,00	2,75	186,00	3,46	48,60	1,76	68,00	2,55	12,20
9	90	10*	17,17	128,60	2,74	203,93	3,45	53,27	1,76	75,30	2,59	13,48
		12*	20,33	149,67	2,71	235,88	3,41	62,40	1,75	86,20	2,67	15,996
		6,5	12,80	122,00	3,09	193,00	3,88	50,70	1,99	71,40	2,68	10,10
		7	13,80	131,00	3,08	207,00	3,88	54,20	1,98	76,40	2,71	10,80
		8	15,60	147,00	3,07	233,00	3,87	60,90	1,98	86,30	2,75	12,20
		10	19,20	179,00	3,05	284,00	3,84	74,10	1,96	110,0	2,83	15,10
10	100	12	22,80	209,00	3,03	331,00	3,81	86,90	1,95	122,0	2,91	17,90

Пішін нөмірі	Қиманың өлшемдері		Қиманың ауданы см^2	Өстерге қатысты анықтамалық шамалар										Масса Γ м, кг
	b	d		z - z		z ₀ - z ₀		y ₀ - y ₀		$I_{zy}, \text{см}^4$	z ₀ , см			
				$I_{z^2}, \text{см}^4$	$i_{z^2}, \text{см}$	$I_{z0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{z0}^{\max}, \text{см}$	$I_{yz}^{\min}, \text{см}^4$	$i_{yz}^{\min}, \text{см}$					
	мм			$I_{z^2}, \text{см}^4$	$i_{z^2}, \text{см}$	$I_{z0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{z0}^{\max}, \text{см}$	$I_{yz}^{\min}, \text{см}^4$	$i_{yz}^{\min}, \text{см}$					
10	100	14	26,30	237,00	3,00	375,00	3,78	99,30	1,94	138,0	2,99	20,60		
		15*	27,99	250,68	2,99	395,87	3,76	105,48	1,94	145,0	3,03	21,97		
		16	29,70	264,00	2,98	416,00	3,74	112,00	1,94	152,0	3,06	23,30		
11	110	7	15,20	176,00	3,40	279,00	4,269	72,70	2,19	106,0	2,96	11,9		
		8	17,20	198,00	3,39	315,00	4,28	81,80	2,18	116,0	3,00	13,5		
		8	18,80	259,75	3,72	412,45	4,68	107,04	2,39	153,0	3,25	14,76		
12	120	10	23,24	317,16	3,69	503,79	4,66	130,54	2,37	187,0	3,33	18,24		
		12	27,60	371,80	3,67	590,28	4,62	153,33	2,36	218,0	3,41	21,67		
		15	33,99	448,90	3,63	711,32	4,57	186,48	2,34	262,0	3,53	26,68		
12.5	125	8	19,70	294,00	3,87	467,00	4,87	122,00	2,49	172,0	3,36	15,50		
		9	22,00	327,00	3,86	520,00	4,86	135,00	2,48	192,0	3,40	47,30		
		10	24,30	360,00	3,85	571,00	4,84	149,00	2,47	211,0	3,45	19,10		
14	140	12	28,90	422,00	3,82	670,00	4,82	174,00	2,46	248,0	3,53	22,70		
		14	33,40	482,00	3,80	764,00	4,78	200,00	2,45	282,0	3,61	26,20		
		16	37,80	539,00	3,78	853,00	4,75	224,00	2,44	315,0	3,68	29,60		
15	150	9	24,70	466,00	4,34	739,00	5,47	192,00	2,79	274,0	3,78	19,40		
		10	27,30	512,00	4,33	814,00	5,46	211,00	2,78	301,0	3,82	21,50		
		12	32,50	602,00	4,31	957,00	5,43	248,00	2,76	354,0	3,90	25,50		
15	150	10	29,33	634,76	4,65	1008,56	5,86	260,97	2,98	374,0	4,07	23,02		
		12	34,89	747,48	4,63	1187,86	5,83	307,09	2,97	440,0	4,15	27,39		
		15	43,08	908,38	4,59	1442,60	5,79	374,17	2,95	534,0	4,27	33,82		
		18	51,09	1060,08	4,56	1680,92	5,74	439,24	2,93	621,0	4,38	40,11		

Пішін нөмірі	Қиманың өлшемдері		Қиманың ауданы см^2	Өстерге қатысты анықтамалық шамалар										Масса I м, кг
	b	d		$Z-Z$		Z_0-Z_0		Y_0-Y_0		$I_{zy}, \text{см}^4$	$Z_0, \text{см}$			
				$I_{z^2}, \text{см}^4$	$i_{z^2}, \text{см}$	$I_{z_0^{\max}}, \text{см}^4$	$i_{z_0^{\max}}, \text{см}$	$I_{yz}^{\min}, \text{см}^4$	$i_{z_0^{\min}}, \text{см}$					
	мм													
16	160	10	31,40	774,00	4,96	1229,00	6,25	319,00	3,19	455,0	4,30	24,70		
		11	34,40	844,00	4,95	1341,00	6,24	348,00	3,18	496,0	4,35	27,00		
		12	37,40	913,00	4,94	1450,00	6,23	376,00	3,17	537,0	4,39	29,40		
		14	43,30	1046,00	4,92	1662,00	6,20	431,00	3,16	615,0	4,47	34,00		
		16	49,10	1175,00	4,89	1866,00	6,17	485,00	3,14	690,0	4,55	38,50		
		18	54,80	1299,00	4,87	2061,00	6,13	537,00	3,13	771,0	4,63	43,00		
		20	60,40	1419,00	4,85	2248,00	6,10	589,00	3,12	830,0	4,70	47,40		
		11	38,80	1216,00	5,60	1933,00	7,06	500,00	3,59	716,0	4,85	30,50		
18	180	12	42,20	1317,00	5,59	2093,00	7,04	540,00	3,58	776,0	4,89	33,10		
		15*	52,18	1607,36	5,55	2554,99	7,00	659,73	3,56	948,0	5,01	40,96		
		18*	61,99	1884,07	5,51	2992,69	6,95	775,44	3,54	1108,0	5,13	48,66		
		20*	68,43	2061,11	5,49	3271,31	6,91	850,92	3,53	1210,0	5,20	53,72		
		12	47,10	1823,00	6,22	2896,00	7,84	749,00	3,99	1073,0	5,37	37,00		
		13	50,90	1961,00	6,21	3116,00	7,83	805,00	3,98	1156,0	5,42	39,90		
20	200	14	54,60	2097,00	6,20	3333,00	7,81	861,00	3,97	1236,0	5,45	42,80		
		16	62,00	2363,00	6,17	3755,00	7,78	970,00	3,96	1393,0	5,54	48,70		
		18*	69,30	2620,64	6,15	4164,54	7,75	1076,74	3,94	1544,0	5,62	54,40		
		20	76,50	2871,00	6,12	4560,00	7,72	1182,00	3,93	1689,0	5,70	60,10		
		24*	90,78	3350,66	6,08	5313,50	7,65	1387,73	3,91	1963,0	5,85	71,26		
		25	94,30	3466,00	6,06	5494,00	7,63	1438,00	3,91	2028,0	5,89	74,00		
		30	111,50	4020,00	6,00	6351,00	7,55	1988,00	3,89	2332,0	6,07	87,00		

Пішін нөмірі	Қиманың өлшемдері		Қиманың ауданы см^2	Өстерге қатысты анықтамалық шамалар										Масса I м, кг
	b	d		$Z - Z$		$Z_0 - Z_0$		$Y_0 - Y_0$		$I_{zy}, \text{см}^4$	$Z_0, \text{см}$			
				$I_{z^2}, \text{см}^4$	$i_{z^2}, \text{см}$	$I_{z_0^{\max}}, \text{см}^4$	$i_{z_0^{\max}}, \text{см}$	$I_{yz}^{\min}, \text{см}^4$	$i_{yz}^{\min}, \text{см}$					
	мм			$I_{z^2}, \text{см}^4$	$i_{z^2}, \text{см}$	$I_{z_0^{\max}}, \text{см}^4$	$i_{z_0^{\max}}, \text{см}$	$I_{yz}^{\min}, \text{см}^4$	$i_{yz}^{\min}, \text{см}$					
22	220	14	60,40	2814,00	6,83	4470,00	8,60	1159,00	4,38	1655,0	5,93	47,40		
		16	68,60	3175,00	6,81	5045,00	8,58	1306,00	4,36	1869,0	6,02	53,80		
		16	78,40	4717,10	7,76	7492,10	9,78	1942,09	4,98	2775,0	6,75	61,55		
25	250	18	87,72	5247,24	7,73	8336,69	9,75	2157,78	7,96	3089,0	6,83	68,86		
		20	96,96	5764,87	7,71	9159,73	9,72	2370,01	4,94	3395,0	6,91	76,11		
		22	106,12	6270,32	7,09	9961,60	9,69	2579,04	4,93	3691,0	7,00	83,31		
		25	119,71	7006,39	7,65	11125,52	9,64	2887,26	4,91	4119,0	7,11	93,97		
		28	133,12	7716,86	7,61	12243,84	9,59	3189,89	4,90	4527,0	7,23	104,50		
		30	141,96	8176,52	7,59	12964,66	9,56	3388,98	4,89	4788,0	7,31	111,44		

Ескерту: жұлдызшамен белгіленген бұрыштамалар тұтынушылардың арнайы тапсырысымен жасалады.

Ыстықтай жәмшілген теңбүйірсіз болат бұрыштамалар (8510-89 МемСТ)

Пішін нөмірі	Қиманың өлшемдері			Қиманың ауданы $см^2$	Өстерге қатысты анықтамалық шамалар						z_0 , $см$	y_0 , $см$	I_{zy} , $см^4$	Еңкестік бұрышы $тg\alpha$	Масса l м, кг
	B	b	d		z - z		y - y		u - u						
					I_{z^2} , $см^4$	i_{z^2} , $см$	I_{y^2} , $см^4$	i_{y^2} , $см$	$I_{u^2}^{min}$, $см^4$	$i_{u^2}^{min}$, $см$					
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91
3/2	30	20	3	1,43	1,27	0,94	0,45	0,56	0,26	0,43	0,51	1,00	0,43	0,427	1,12
			4	1,86	1,61	0,93	0,56	0,55	0,34	0,43	0,54	1,04	0,54	0,421	1,46
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17
			4	1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	0,35	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48
			4	2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381	1,94
4/3	40	30	5	3,03	4,73	1,25	1,41	0,68	0,86	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,37
			4	2,67	4,18	1,25	2,01	0,87	1,09	0,64	0,78	1,28	1,68	0,544	2,26
4,5/2,8	45	28	5	3,28	5,04	1,24	2,41	0,86	1,33	0,64	0,82	1,32	2,00	0,539	2,46
			3	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	0,78	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68
5/3,2	50	32	4	2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	1,02	0,60	0,68	1,51	1,72	0,379	2,20
			3	2,42	6,17	1,60	1,99	0,91	1,18	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90
5,6/3,6	56	36	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,49
			4	3,58	11,37	1,78	3,70	1,02	2,19	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81
6,3/4,0	63	40	5	4,41	13,82	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,88	1,86	4,5	0,404	3,46
			4	4,04	16,33	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17
6,3/4,0	63	40	5	4,98	19,91	2,00	6,26	1,12	3,37	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91
			6	5,90	23,31	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63
			8	7,68	29,60	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386	6,03

4-кестенің жалғасы

Пішін нөмірі	Қиманың өлшемдері			Қиманың ауданы см ²	Өстерге қатысты анықтамалық шамалар						z ₀ , см	y ₀ , см	I _{zy} , см ⁴	Еңкестік бұрышы град	Масса I, кг
	B	b	d		z - z		y - y		u - u						
					I _z , см ⁴	i _z , см	I _y , см ⁴	i _y , см	I _u ^{min} , см ⁴	i _u ^{min} , см					
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	2,39	12,47	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	12,00	0,436	4,79
			6	7,25	40,92	2,38	14,60	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	5,69
			7	8,37	46,77	2,36	16,61	1,41	9,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	6,57
			8	9,47	52,38	2,35	18,52	1,40	10,87	2,52	1,29	10,9	17,80	0,430	7,43
8/5	80	50	5	6,36	41,64	2,56	12,68	1,41	7,57	1,09	1,13	2,6	13,20	0,387	4,99
			6	7,55	48,98	2,55	14,85	1,40	8,88	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386	5,92
8/6	80	60	6	8,15	52,06	2,53	25,18	1,76	13,61	1,29	1,49	2,47	20,98	0,547	6,39
			7	9,42	59,61	2,52	28,74	1,75	15,58	1,29	1,53	2,52	21,01	0,546	7,39
			8	10,67	66,88	2,50	32,15	1,74	17,49	1,28	1,57	2,56	26,83	0,544	8,37
			5,5	7,86	65,28	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384	6,17
9/5,6	90	56	6	8,54	70,57	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384	6,70
			8	11,18	90,87	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	1,36	3,04	28,33	0,380	8,77
10/6,3	100	63	6	9,59	98,29	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393	7,53
			7	11,1	112,86	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392	8,70
			8	12,6	126,96	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391	9,87
			10	15,5	153,95	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387	12,1
10/6,	10	65	7	11,23	114,05	3,19	38,12	1,85	22,77	1,41	1,52	3,24	38,00	0,415	8,81
			8	12,73	128,31	3,18	42,96	1,84	25,24	1,41	1,56	3,28	42,64	0,414	9,99
			10	15,67	155,52	3,15	51,68	1,82	30,60	1,40	1,64	3,37	51,18	0,410	12,30

4-кестенің жалғасы

Пішін нөмірі	Қиманың өлшемдері			Қиманың ауданы см^2	Өстерге қатысты анықтамалық шамалар						z_0 , см	y_0 , см	I_{zy} , см^4	Еңкестік бұрышы ғә	Масса I , кг
	B	b	d		$z-z$		$y-y$		$u-u$						
					I_z , см^4	i_z , см	I_y , см^4	i_y , см	I_u^{\min} , см^4	i_u^{\min} , см					
11/7	110	70	6,5	11,4	142,42	3,53	45,61	2,00	26,94	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402	8,98
				13,9	171,54	3,51	54,64	1,98	32,31	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400	10,9
12,5/8	125	80	7	14,1	226,53	4,01	73,73	2,29	43,40	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407	11
			8	16	255,62	4,00	80,95	2,28	48,82	1,75	1,84	4,05	84,10	0,406	12,5
			10	19,7	311,61	3,98	100,47	2,26	59,33	1,74	1,92	4,14	102,0	0,404	15,5
			12	23,4	364,79	3,95	116,84	2,24	69,47	1,72	2,00	4,22	118,0	0,400	18,3
14/9	140	90	8	18	364,68	4,49	119,79	2,58	70,27	1,98	2,03	4,49	121,0	0,411	14,1
			10	22,24	444,45	4,47	145,54	2,56	85,51	1,96	2,12	4,58	147,0	0,409	17,5
16/10	160	100	9	22,87	605,97	5,15	186,03	2,85	110,40	2,20	2,24	5,19	194,0	0,391	17,96
			10	25,28	666,59	5,13	204,09	2,84	121,16	2,19	2,28	5,23	218,0	0,390	19,85
			12	30,04	784,22	5,11	238,75	2,82	142,14	2,18	2,36	5,32	249,0	0,388	23,58
			14	34,72	897,19	5,08	271,60	2,80	162,49	2,16	2,43	5,40	282,0	0,385	27,26
18/11	180	110	10	28,33	952,28	5,80	276,37	3,12	165,44	2,42	2,44	5,88	295,0	0,376	22,20
			12	33,69	1122,56	5,77	324,09	3,10	194,28	2,40	2,52	5,97	348,0	0,374	26,40
20/12,5	200	125	11	34,87	1449,02	6,45	446,36	3,58	263,84	2,75	2,79	6,50	465,0	0,392	27,37
			12	37,89	1568,19	6,43	481,93	3,57	285,04	2,74	2,83	6,54	503,0	0,392	29,74
			14	43,87	1800,83	6,41	550,77	3,54	326,54	2,73	2,91	6,62	375,0	0,390	34,43
			16	49,77	2026,08	6,38	616,66	3,52	366,99	2,72	2,99	6,71	643,0	0,388	39,07

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Айталиев Ш.М., Дүзелбаев С.Т. Материалдар кедергісі: Есептер шығаруға арналған оқу құралы, 1, 2-бөлім. – Павлодар: ПМУ РББ, 2007. Б. 256, 2007. Б. 240.
2. Аманжол М. Нұғыман. Теориялық механика негіздері. Оқулық. Екінші басылымы. – Алматы: ЖШС РПБК «Дәуір», 2005. Б. 276.
3. Аркуша А.И. Техническая механика: Теоретическая механика и сопротивление материалов: Учеб. для машиностр. спец. Техникумов. –2-е изд., доп.– М.: Высш. шк., 1989. С. 352.
4. Дүзелбаев С.Т. Инженерлік механика: Оқулық жоғары кәсіптік мамандар дайындайтын техникалық оқу орындарының студенттеріне арналған, 3-басылым. – Астана: ЕҰУ ҒБО, 2010. Б. 376.
5. Дүзелбаев С.Т. Инженерлік механика. Жоғары кәсіптік «Сәулет» және «Құрылыс» саласындағы мамандар әзірлейтін оқу орындарының студенттеріне арналған оқулық. – Алматы: Дәуір, 2013. Б. 576.
6. Дүзелбаев С.Т. Инженерлік механика I. Жоғары кәсіптік мамандар әзірлейтін техникалық оқу орындарының студенттеріне арналған оқу құралы. – Алматы: Бастау, 2013. Б. 420.
7. Дүзелбаев С.Т. Инженерлік механика II. Жоғары кәсіптік мамандар әзірлейтін техникалық оқу орындарының студенттеріне арналған оқу құралы. – Алматы: Бастау, 2013. Б. 284.
8. Дүзелбаев С.Т. Инженерлік механика III. Жоғары кәсіптік мамандар әзірлейтін техникалық оқу орындарының студенттеріне арналған оқу құралы. – Алматы: Бастау, 2013. Б. 336.
9. Дүзелбаев С.Т. Материалдар кедергісі I. Оқулық жоғары кәсіптік мамандар әзірлейтін техникалық оқу орындарының студенттеріне арналған. – Алматы: Бастау, 2014. Б. 384.
10. Дүзелбаев С.Т. Материалдар кедергісі II, есептер шығаруға арналған оқу құралы: Жоғары кәсіптік мамандар әзірлейтін техникалық оқу орындарының студенттеріне арналған. – Алматы: Бастау, 2014. Б. 420.
11. Дүзелбаев С.Т. Материалдар кедергісі III, семестрлік жұмыстардың тапсырмалар жинағы мен зертханалық практикум: Жоғары кәсіптік мамандар әзірлейтін техникалық оқу орындарының студенттеріне арналған. – Алматы: Бастау, 2014. Б. 320.

12. Дүзелбаев С.Т. Материалдар кедергісі IV, есептер жинағы: Жоғары кәсіптік мамандар әзірлейтін техникалық оқу орындарының студенттеріне арналған. – Алматы: Бастау, 2014. Б. 192.
13. Дүзелбаев С.Т., Абдушқуров Ф.Б. және т.б. Техникалық механика: Техникалық колледждердің студенттеріне арналған оқулық. – Алматы: «Эверо» баспасы, 2014. Б. 444.
14. Дүзелбаев С.Т., Абдушқуров Ф.Б. және т.б. Техникалық механика: Құрылыс колледждердің студенттеріне арналған оқулық. – Алматы: «Эверо» баспасы, 2014. Б. 648.
15. Жапаров Ж.Ж., Құлтасов Қ.А., Тәтенов А.М. Теориялық механика есептерін шешу: Жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған оқу құралы. – Алматы: Ана тілі, 1993. Б, 168.
16. Жолдасбеков Ө.А., Сағитов М.Н. Теориялық механика. – Алматы: Атамұра, 2002. Б. 575.
17. Жолдасбеков Ө.А., Сағитов М.Н. Кинематика есептері және олардың шешу жолдары. – Алматы: Мектеп, 1985. Б. 230.
18. Жолдасбеков Ө.А., Ахметов А.Қ. Теориялық механика есептер жинағы. – Алматы: Ғылым, 2003. Б. 394.
19. Жүнісбеков С., Қадырбаев А. Материалдар кедергісі: оқулық. – Алматы: «Бастау», 2008. Б. 373.
20. Мовин М.С. и др. Основы технической механики: Учеб. для технологических немашиностроительных спец. техникумов. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Машиностроение. Ленингр. от-ние, 1990. С. 288.
21. Нестеренко В.П., Зитов А.И., Катанухина С.Л., Куприянов Н.А., Дробчик В.В. Техническая механика: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007, С. 175.
22. Олофинская В.П. Техническая механика: Курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий: Учебное пособие. – 2-е изд. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2007, С. 349.
23. Портаев Л.П. и др. Техническая механика: Учеб. для техникумов/ Л.П. Портаев, А.А. Петраков, В.Л. Портаев; под ред. Л.П. Портаева.– М.: Стройиздат, 1987. С. 464.
24. Сетков В.И. Сборнику задач по технической механике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. Б. 224.
25. Тажибаев С.Д. Қолданбалы механика: Жоғары оқу орындары студенттеріне арналған оқулық. – Алматы: Білім, 1994. Б. 336.

26. Үркімбаев М.Ф, Жүнісов С. Материалдар кедергісі теориясының негіздері: Техникалық жоғары оқу орындары студенттеріне арналған оқулық. – Алматы: Білім, 1994. Б. 224.

27. Іңкәрбеков А. Теориялық механика: Статика және кинематика. Техникалық мамандар даярлайтын жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған оқулық. – Алматы: «Мектеп», 2005. Б. 232.

28. Іңкәрбеков А. Техникалық механика: оқулық/ Жүнісбеков С., Қадырбаев Ә., Жұмағұлов Ж. – Алматы: «Бастау», 2009. Б. 357.

29. Эрдеди А.А. и др. Техническая механика: Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учеб. для машиностр. спец. Техникумов /А.А. Эрдеди, Ю.А. Медведев, Н.А. Эрдеди. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш.шк., 1991. С. 304.

30. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования/А.А. Эрдеди, Н.А. Эрдеди. – 8-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. С. 320.

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз.....	3
Шартты белгілеулер	5
ТЕОРИЯЛЫҚ МЕХАНИКА	
Кіріспе.....	13
Бірінші бөлім. СТАТИКА	
1-тарау. Статиканың негізгі ұғымдары мен аксиомалары.....	16
1.1. Статиканың негізгі ұғымдары	16
1.2. Статиканың аксиомалары	19
1.3. Статиканың қарапайым теоремалары.....	21
1.4. Күштің өске проекциясы.....	23
1.5. Күш моменті. Күштің нүктеге қатысты моменті.....	25
1.6. Байланыстар мен олардың реакциялары	28
1.7. Есептерді шешудің әдістемесі	31
Жаттығу есептері.....	41
Қайталау сұрақтары.....	42
2-тарау. Жазық жинақталатын күштер жүйесі	45
2.1. Жазық жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күшін анықтаудың геометриялық тәсілі	45
2.2. Жазық жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күшін анықтаудың аналитикалық тәсілі.....	49
2.3. Есептерді шешудің әдістемесі	51
Жаттығу есептері	61
Қайталау сұрақтары.....	61
3-тарау. Қос күш	63
3.1. Қос күш және оның денеге әсері.....	63
3.2. Қос күштің негізгі қасиеттері	64
3.3. Қос күш эквиваленттілігі	66
3.4. Бір жазықтағы қос күшті қосу. Қос күштің тепе-теңдік шарты.....	69
3.5. Есептерді шешудің әдістемесі	70
Жаттығу есептері	74
Қайталау сұрақтары.....	75
4-тарау. Еркін күштер жүйесі.....	76
4.1. Жазық параллель күштер жүйесі	76

4.2. Күшті берілген нүктеге келтіру. Еркін жазық күштер жүйесін берілген нүктеге келтіру.....	78
4.3. Жазық күштер жүйесінің тең әсерлі күші. Вариньон теоремасы	82
4.4. Жазық күштерді келтірудің жеке жағдайлары.....	83
4.5. Еркін бағытталған жазық күштер жүйесінің тепе-теңдік Шарты.....	83
4.6. Кеңістіктегі күштер жүйесі.....	85
4.7. Арқалықты жүйелер. Жүктемелердің түрлері	86
4.8. Есептерді шешудің әдістемесі	89
Жаттығу есептері	98
Қайталау сұрақтары.....	100
5-тарау. Үйкеліс	102
5.1. Үйкеліс туралы ұғым.....	102
5.2. Сырғанау үйкелісі.....	103
5.3. Домалау үйкелісі.....	106
5.4. Есептерді шешудің әдістемесі	108
Жаттығу есептері	113
Қайталау сұрақтары.....	115
6-тарау. Ауырлық центрі. Жазық қималардың геометриялық сипаттамалары	116
6.1. Ауырлық центрі	116
6.2. Жазық қималардың геометриялық сипаттамалары	120
6.3. Кейбір қарапайым пішіндердің екпін моменттері мен кедергі моменттері.....	123
6.4. Параллель өстерге қатысты екпін моменттері.....	125
6.5. Бұрылған өстерге қатысты екпін моменттерінің байланысы	127
6.6. Екпіннің бас өстері мен бас моменттері.....	128
6.7. Есептерді шешудің әдістемесі	130
Жаттығу есептері	137
Қайталау сұрақтары.....	138
Екінші бөлім. КИНЕМАТИКА	
7-тарау. Нүкте кинематикасы	140
7.1. Кинематиканың негізгі түсініктері мен анықтамалары	140
7.2. Нүкте қозғалысының берілу тәсілдері.....	142
7.3. Нүкте қозғалысы әртүрлі тәсілдермен берілген жағдайдағы жылдамдығы мен үдеуін анықтау.....	143

7.4. Нүктенің үдеуге байланысты қозғалыс түрлері.....	152
7.5. Есептерді шешудің әдістемесі	154
Жаттығу есептері	161
Қайталау сұрақтары.....	162
8-тарау Қатты дене кинематикасы	164
8.1. Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы.....	164
8.2. Қатты дененің айналмалы қозғалысы	166
8.3. Бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеудің векторлары	169
8.4. Қозғалмайтын өсті айналатын қатты дене нүктелерінің жылдамдықтарымен үдеулері.....	170
8.5. Қатты дененің жазық-параллель қозғалысы жөнінде ұғым	173
8.6. Есептерді шешудің әдістемесі	176
Жаттығу есептері	181
Қайталау сұрақтары.....	182

Үшінші бөлім. ДИНАМИКА

9-тарау. Материялық нүкте динамикасының негіздері.....	185
9.1. Динамиканың аксиомалары.....	185
9.2. Материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулері.....	187
9.3. Динамиканың бірінші және екінші есептері	190
9.4. Есептерді шешудің әдістемесі	192
Жаттығу есептері	199
Қайталау сұрақтары.....	200

10-тарау. Кинетостатиканың негіздері.

Даламбер принципі.....	201
10.1. Екпін күштері.....	201
10.2. Даламбер принципі.....	202
10.3. Есептерді шешудің әдістемесі.....	203
Жаттығу есептері	208
Қайталау сұрақтары.....	209

Төртінші бөлім. ЖҰМЫС ЖӘНЕ ҚУАТ

11-тарау. Жұмыс.....	210
11.1. Тұрақты күштің түзу сызықты қозғалыстағы жұмысы.....	210
11.2. Қисық сызықты қозғалыстағы айнымалы күштің жұмысы	211

11.3. Тең әсер күштің жұмысы туралы теорема.....	213
11.4. Ауырлық күштің жұмысы туралы теорема.....	214
11.5. Айналыстағы денеге түсірілген тұрақты күштің жұмысы.	215
11.6. Қуат.....	216
11.7. Пайдалы әсер коэффициенті.....	217
11.8. Есептерді шешудің әдістемесі.....	219
Жаттығу есептері.....	222
Қайталау сұрақтары.....	222

Бесінші бөлім. МАТЕРИЯЛЫҚ НҮКТЕ ДИНАМИКАСЫНЫҢ ЖАЛПЫ ТЕОРЕМАЛАРЫ

12-тарау. Қозғалыс мөлшері	223
12.1. Қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема.....	223
12.2. Қозғалыс мөлшері моментінің өзгеруі туралы теорема..	225
13-тарау. Кинетикалық энергия.	
Энергияның сақталу заңы	230
13.1. Кинетикалық энергияның өзгеруі туралы теорема	230
14-тарау. қатты дене динамикасының негіздері	233
14.1. Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы.....	233
14.2. Қатты дененің айналмалы қозғалысы үшін динамиканың негізгі теңдеуі.....	234
14.3. Абсолют қатты дененің қарапайым қозғалыстарының кинетикалық энергиясы	236
14.4. Механикалық энергияның сақталу заңы	238
14.5. Есептерді шешудің әдістемесі.....	239
Жаттығу есептері.....	244
Қайталау сұрақтары.....	245

МАТЕРИАЛДАР КЕДЕРГІСІ

15-тарау. Негізгі қағидалар	247
15.1. Бастапқы ұғымдар	247
15.2. Материалдар кедергісі ғылымының негізгі жорамалдары.....	251
15.3. Сыртқы күштер және олардың жіктелуі.....	253
15.4. Қию әдісі. Кернеу	256
Қайталау сұрақтары.....	262
16-тарау. Бойлық созылу мен сығылу	263
16.1. Созылу мен сығылу жағдайындағы бойлық күштер. Бойлық күштердің эпюралары	263

16.2. Созылған (сығылған) стерженьнің бойлық, ендік деформациялары. Гук заңы.....	266
16.3. Аз көміртекті болаттың созылу диаграммасы	270
16.4. Деформацияның потенциал энергиясы	274
16.5. Мүмкіндік кернеу. Беріктік қоры коэффициенті. Беріктік шарты.....	277
16.6. Ауырлық күш әсері.....	279
16.7. Созылған стерженьнің көлбеу қималарындағы кернеулері. Бас кернеулер.....	282
16.8. Есептерді шешудің әдістемесі	288
Жаттығу есептері	293
Қайталау сұрақтары.....	295
17-тарау. Созылу мен сығылудағы статикалық анықталмаған жүйелер.....	298
17.1. Статикалық анықталмаған жүйелер жөніндегі жалпы ұғым	298
17.2. Температуралық кернеулер	303
17.3. Монтаждық кернеу	309
Жаттығу есептері	312
Қайталау сұрақтары.....	314
18-тарау. Ығысу	315
18.1. Кесілу және ығысу ұғымдары. Ығысудағы деформациялар.....	315
18.2. Ығысудағы кернеулер. Гук заңы.....	316
18.3. Ығысудың беріктікке есептеулері.....	319
18.4. Есептерді шешудің әдістемесі	322
Жаттығу есептері	323
Қайталау сұрақтары.....	324
19-тарау. Бұралу	325
19.1. Негізгі түсініктер	325
19.2. Көлденең қимасы дөңгелек білеудің бұралуы	326
19.3. Кернеу мен деформация.....	328
19.4. Білікті беріктік пен қатандыққа есептеу.....	332
19.5. Есептерді шешудің әдістемесі	333
Жаттығу есептері	337
Қайталау сұрақтары.....	338
20-тарау. Жазық иілу	340
20.1. Иілу деформациясы. Арқалық.....	340
20.2. Июші моменттер мен көлденең күштер	342

20.3. M , Q және q араларындағы дифференциалдық байланыстар	345
20.4. Көлденең күштер мен ию моменттерінің эпюраларын тұрғызу	349
20.5. Жазық иілген түзу арқалықтың тік кернеулері.....	354
20.6. Жанама кернеулерді анықтау. Журавский формуласы.....	359
20.7. Иілуге есептеу, мүмкіндік кернеу	362
Жаттығу есептері	368
Қайталау сұрақтары.....	370
21-тарау. Иілу деформациялары	372
21.1. Серпімді сызықтың дифференциалдық теңдеуі.....	372
21.2. Арқалықтың орнын ауыстыруларын бастапқы параметрлер әдісімен анықтау	382
Жаттығу есептері	388
Қайталау сұрақтары.....	389
22-тарау. Беріктік теориялары	390
22.1. Беріктік теориясының мәселелері	390
22.2. Беріктік теориялары	392
Қайталау сұрақтары.....	396
23-тарау. Күрделі қарсыласу	397
23.1. Негізгі түсініктер	397
23.2. Иіліп бұралу	399
23.3. Бұралу және созылу немесе сығылу	405
Жаттығу есептері	406
Қайталау сұрақтары.....	408
24-тарау. Бойлық иілу	409
24.1. Бойлық иілу ұғымы	409
24.2. Эйлер және Ясинский формулалары	410
24.3. Түзусызықты стерженьді орнықтылыққа есептеу	415
24.4. Есептерді шешудің әдістемесі	417
Жаттығу есептері	422
Қайталау сұрақтары.....	423
Қосымшалар	
Қосымша А	424
Қосымша Ә	425
Қосымша Б.....	426
Қосымша В	427
Қосымша Г.....	428

Қосымша Д	429
Қосымша Е.....	430
Қосымша Ж	431
Пайдаланылған әдебиеттер	443

Дүзелбаев Сайлаубек Тілеубайұлы

ТЕХНИКАЛЫҚ МЕХАНИКА

Теориялық механика, материалдар кедергісі

Оқулық

Техникалық (құрылыстан басқа) колледж студенттеріне арналған

Компьютерде беттеген және дизайнін жасаған – **Любовицкая Ольга**

ISBN 978-601-281-175-9

Басуға 2015 жылы қол қойылды.
Форматы 60x84 1/16. Көлемі 28,5 баспа табақ.
Times гарнитурасы. Офсеттік басылым.
Тапсырыс № 253. Тиражы – 1000 дана.

«Бастау» баспасы
Мемлекеттік лицензия – № 0000036
ҚР Білім және ғылым министрлігі.
ҚР Ұлттық мемлекеттік кітап палатасының
халықаралық код беру туралы №155 –
978-601-281 сертификаты.
Қазақстан Республикасы Ұлттық бизнес-рейтингінің
«Лидер отрасли – 2015» ұлттық сертификаты.
Алматы қаласы, Сейфуллин даңғылы, 458/460-95.
Тел.: 279 49 53, 279 97 32.

«Полиграфсервис» баспаханасында басылды (тел.: 233 32 53).
Алматы қаласы, 050050, Зеленая көшесі, 13-а.

